

11.1. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

Fibonacci-számok – megoldások

3001 $f_{15} = 610$, $f_{20} = 6765$.

3002 *a)* –1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13;

b) 1, –1, 0, –1, –1, –2, –3, –5, –8, –13.

3003 *a)* 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136.

b) Igen, a 13.

3004 A második tagot az első és az első előtt álló összegeként kapjuk: $x + 1 = 1$; innen $x = 0$. Az előtte levő tag: $y + 0 = 1$; innen $y = 1$. Majd $z + 1 = 0$; $z = -1$. Aztán $u + (-1) = 1$; $u = 2$. Hasonlóan kapjuk a többi számot:

34, –21, 13, –8, 5, –3, 2, –1, 1, 0, **1, 1,** 2, 3, 5, …

Érdekes módon a Fibonacci-számokat látjuk, csak váltakozó előjellel.

3005 Érdemes először kísérletezni néhány értékkel. Hamar megtaláljuk a csupa 0 sorozatot, ami ismétlődést mutat. Azonban más sorozat nem, így megfogalmazhatjuk a sejtésünket: *általában* nem lehet a számok között ismétlődés. Sőt, egy idő után vagy szigorúan növekednek, vagy szigorúan csökkennek a számok – a már említett csupa 0 kivételével. Hogyan bizonyítsuk be?

Gyűjtsünk össze egyszerű megfigyeléseket.

A) Ha két pozitív szám van egymás után valahol a sorozatban, akkor az utánuk levők is pozitívak, sőt a számok szigorúan növekednek az összeadás miatt.

B) Ha van két szomszédos negatív szám a sorozatban, akkor az utánuk levők is negatívak, sőt a számok szigorúan csökkennek.

C) Ha találunk nullát, és előtte pozitív vagy negatív értéket, akkor az *A)* vagy *B)* esethez jutunk: a nulla megduplázza az előtte álló számot.

Jónak tűnik a gondolatmenet, folytassuk. Mi a helyzet, ha egy pozitív és egy negatív érték áll egymás mellett?

D) Ha a két szám abszolút értéke egyenlő, akkor megjelenik a nulla, *C)* esethez jutunk.

E) Ha a pozitív szám abszolút értéke nagyobb, akkor pozitív értéket kapunk. Ezen belül E_1), ha a pozitív érték volt később, az *A)* esethez jutottunk.

F) Ha a negatív érték abszolút értéke nagyobb, akkor negatív számot kapunk. Ezen belül F_1), ha a negatív érték volt később, a *B)* esethez jutottunk.

Az *E)* és *F)* esetben van egy-egy további eset is: E_2), ha a negatív érték van később; illetve F_2), ha a pozitív érték szerepel később. Mindkét helyzetben visszajutunk *D)*, *E)* vagy *F)* esethez.

Ráadásul a létrejövő szám abszolút értéke megegyezik az összeg abszolút értékével, ami szigorúan kisebb lesz, mint az előző kettő közül a nagyobb abszolút értékű. Ennek a csökkenésnek pedig előbb-utóbb vége szakad: *A)*, *B)* vagy *C)* esetekhez kanyarodunk vissza.

Néhány példa az E_2) és F_2) esetekre:

a) –10, 4, –6, –2, … *b)* –10, 8, –2, 6, 4, … *c)* 10, –5, 5, 0, …

Mivel minden esetet áttekintettünk, ezzel a bizonyítást befejeztük: a 0, 0, 0, … számok kivételével nincs más olyan Fibonacci-szerű sorozat, amiben lenne ismétlődés (sőt, előbb-utóbb mindig szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő számokat kapunk).



Permutációk, variációk – megoldások

3006 86!

3007 27!

3008 $\frac{21!}{6!\cdot 5!\cdot 10!}=162954792.$

3009 *a)* $\frac{(3+2)!}{3!\cdot 2!}=10;$ *b)* $\frac{(3+2+0)!}{3!\cdot 2!\cdot 0!}=10;$ *c)* $0!=1.$

3010 $\frac{18!}{(18-6)!}=18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13=13366080.$

3011 *a)* $\frac{10!}{(10-6)!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=151200;$

b) $\frac{10!}{(10-4)!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040.$

3012 10^7.

3013 $2^8=256$.

3014 Ebben a feladatban és a továbbiakban is nemnegatív (sőt elsősorban pozitív) egész megoldásokat keresünk. A legegyszerűbb, ha próbálkozunk.

A másik lehetőség, hogy kicsit gondolkodunk a próbálkozás előtt: $n!=39\,916\,800$. A szám végén álló két 0 arra utal, hogy két ötös prímtényezőnek lennie kell a szorzatban. Az egyik maga az 5. A másikat a 10-ben találjuk, tehát legalább 10!-ig el kell menni. Ez még kevés, a megoldás $n=11$.

3015 Az első három számjegyet 6^3, a második hármat $\frac{10!}{(10-3)!}$-féleképpen kaphatjuk meg. Az eredmény a kettő szorzata: $216\cdot 720=155\,520$.

3016 *a)* Egyszerű permutációja 8 különböző elemnek: $8!=40\,320$.

b) Válasszunk ki egy főt, tekintsük őt kiindulópontnak. A megadott körüljárás szerint ültessük sorba a maradék hét főt. Ez úgy történik, mintha egyszerűen permutálnánk őket: $7!=5\,040$.

c) Most nem érdekes a körüljárási irány, ezért ugyanazt kapjuk, ha az asztal egy átmérőjére tükrözzük a résztvevőket. Így az előző pontban másik ültetést kaptunk volna, most azonban ez a kettő ugyanaz. A megoldás: $\frac{7!}{2}=2520.$

3017 Számoljuk meg a növényeket, összesen 6-félét találunk a pulton. Mindegyikből minden helyen tehet egyet a kosarába, azaz a $6^n=1\,679\,616$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldást megkaphatjuk próbálkozással vagy az $1\,679\,616$ prímtényezős felbontásával. A megoldás: $n=8$.

Megjegyzés: Pár lecke múlva mindkét oldal 6-os alapú logaritmusát véve is meg tudjuk oldani az egyenletet.

3018 A második dobozból az ismétlődés miatt a cédulákat $\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$-féleképp húzhatjuk ki (permutáció, hiszen mindet kivesszük). Az első dobozból ugyancsak az ismétlődés miatt 10^4 lehetőségünk van kivenni a cédulákat (variáció, a kiválasztás miatt). Eredményünk a kettő szorzata: $12\,600\,000$.



3019 Egy n alapú számrendszerben 0-tól $(n-1)$-ig n különböző számjegy van, ezekből kell 7 helyre írni egyet-egyet. (A kevesebb jegyből álló számokat úgy kapjuk, hogy a szám elejére megfelelő számú 0-t írunk.) Vagyis az $n^7 = 2\,097\,152$ egyenletet kell megoldanunk, amit próbálkozással vagy hetedik gyökvonással teszünk meg. Az eredmény $n = 8$, a számrendszer tehát a nyolcas.

3020 *a)* Bármikor bármelyik csúcsra ugorhat, minden esetben négy lehetősége van: 4^{10}.

b) Elsőnek bárhova, utána viszont már csak 3-3 helyre ugorhat: $4 \cdot 3^9$.

c) Elsőnek bárhova ugorhat. A következő ugrása a mostani helyéről elviszi, az utána levőkben pedig mindig kizárunk kettő csúcsot: $4 \cdot 3 \cdot 2^8$.

3021 Legyen a műsor nézőszáma n. Ekkor az első játékost n, a másodikat $(n-1)$-féleképpen választhatják ki a nézők közül, vagyis

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) = 1980.$$

Ezt az egyenletet négyféleképp: próbálkozással; a zárójelet felbontva másodfokú egyenletként; az 1980-at prímtényezőkre bontva vagy gyökvonásból kerekítve is megoldhatjuk. Az eredmény $n = 45$.

3022 *a)* A három említett miniszterelnököt vegyük egy „csomagnak”. Ekkor 8 főt kell leültetnünk, ezt 8!-féleképp tehetjük meg. Az angolnak és a franciának közre kell fognia a németet, őket ezért még kétféleképpen ültethetjük minden sorrenden belül. Az eredmény: $2 \cdot 8!$

b) Ismét csomagoljuk össze a hármast. 8 főt kör alakú asztal mellé 7!-féleképp ültethetünk le, ha figyelembe vesszük a körüljárási irányt is. Vegyük figyelembe a hármasban a szélsők sorrendjét is: $2 \cdot 7!$ Végül tekintsünk el a körüljárási iránytól: $\frac{2 \cdot 7!}{2} = 7!$

3023 Egyik lehetőségünk a próbálkozás. Másrészt viszont ha számolunk, ismétléses permutációt kell számolnunk. Jelöljük c-vel $(2 \le c < 12)$ a keresett színpadi művek számát:

$$\frac{(4+5+c)!}{4! \cdot 5! \cdot c!} = 27\,720.$$

Tüntessük el a törtet, a következő egyenletet kapjuk:

$$(9+c)! = 79\,833\,600 \cdot c!$$

Leosztva $11!$-sal (figyelembe véve c lehetséges értékeit):

$$12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (9+c) = 2c!$$

$$6 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (9+c) = c!$$

A c értékétől függően több esetünk van. Ha $9 + c = 12$, akkor $c = 3$ és így $12 = 2 \cdot 3!$ Ez jó megoldás.

Ha $3 < c < 12$, akkor a bal oldalon szerepel 13, ezért a jobb oldalon is el kell menni legalább 13!-ig. Azonban ebben (jobb oldalon) szerepel 11 is, ami viszont a másik (bal) oldalon nem fog előfordulni, ellentmondásra jutottunk. Ezen esetekben nincs megoldás, Lacinak 3 színházi előadást tartalmazó lemeze van.

3024 Az öt gyermek megszülethet 5 lány; 4 lány és 1 fiú; 3 lány és 2 fiú; 2 lány és 3 fiú; 1 lány és 4 fiú; 5 fiú variációban.

Az első és az utolsó esetben egyszerű dolgunk van, mindkétszer 5! sorrendben adhatnak nevet a megszületendő gyerekeknek.

Vegyük bonyolultabb példának a harmadik esetet. Ekkor a gyerekek között a lányok-fiúk sorrendje ismétléses permutáció: $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$, azon belül a lányoknak $\frac{5!}{(5-3)!}$, a fiúknak $\frac{5!}{(5-2)!}$-féleképpen adhatnak nevet (ismétlés nélküli variáció).



Ez alapján minden esetet számba tudunk venni (a szimmetria miatt elég az egyes eseteket kettővel szorozni), a végeredmény:

$$2\cdot 5!+2\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{5!}{(5-4)!}\cdot\frac{5!}{(5-1)!}+2\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{(5-3)!}\cdot\frac{5!}{(5-2)!}=30\,240.$$

3025 Először is gondoljuk át a feltételeket. Az ismétléses esetben k-ra és n-re semmiféle megszorítás nincs azon kívül, hogy nemnegatív egészek. Az ismétlés nélküli esetben azonban $0\le k\le n$. Ez szigorúbb feltétel az előzőnél, így tartsuk magunkat az utóbbihoz. A kérdés: mely, a fenti feltételeknek megfelelő n, k-ra igaz:

$$n^k=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Feltételezhetjük, hogy $n\ne 0$, így nem kell a 0^0 hatvánnyal foglalkoznunk. Vizsgáljuk meg k néhány értékét! Ha $k=0$, akkor

$$1=n^0=\frac{n!}{n!}=1,$$

vagyis ekkor bármely n-re teljesül az egyenlőség. Ha $k=1$, akkor ugyanez a helyzet:

$$n=n^1=\frac{n!}{(n-1)!}=n.$$

Ha $k=2$, akkor $n^2=n\cdot(n-1)$ egyenlethez jutunk. Ennek egyetlen megoldása $n=0$, ami nem felel meg a $k\le n$ feltételnek. Ha k értékét tovább növeljük, akkor egyre magasabb fokú egyenletekhez jutunk, melyeket nem tudunk megvizsgálni. A megoldás azonban sokkal egyszerűbb.

Azt kell észrevennünk, hogy a kiinduló egyenlőség jobb és bal oldalán is k tényezőből álló szorzatokat találunk, azonban a bal oldalon csupa n tényezővel, a jobbon viszont n-től csökkenő tényezőkkel. Vagyis ha a szorzatoknak több tényezője is van, akkor nem lehetnek egyenlők.

A megoldás: $k=0$ és $k=1$ értékre bármely n-re megegyezik n elem k-tagú ismétléses és ismétlés nélküli variációinak száma, más értékekre viszont soha.

Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög – megoldások

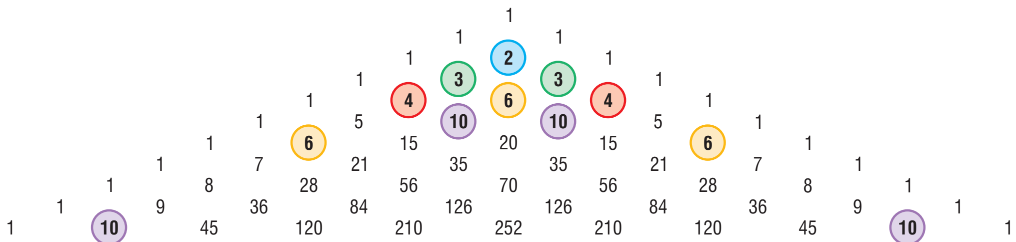
3026 *a)* 6; *b)* 105; *c)* 462; *d)* 165; *e)* 55; *f)* 7381; *g)* 145; *h)* 1578; *i)* 1.

3027 *a)* 1; *b)* n; *c)* n^2-n; *d)* $\frac{n^2-n}{2}$; *e)* n; *f)* 1.

3028 *a)* $\binom{135}{44}$; *b)* $\binom{212}{101}$; *c)* $\binom{112}{55}$.

3029 *a)* Nincs.

b) Egy helyen: 2; kettő helyen: 3 és 4; három helyen: 6; négy helyen: 10. (Több helyen nem lehetnek, mert utoljára a szélső egyes mellett fordulhatnak elő.)





3030 *a)* $\binom{6}{2}=15$; *b)* $\binom{6}{3}=20$; *c)* $\binom{6}{4}=15$; *d)* $\binom{6}{5}=6$;

e) 6 elemből nem lehet 7-et kiválasztani.

3031 *a)* 6; *b)* 5.

3032 $\binom{7}{4}=35.$

3033 *a)* $\binom{45}{6}=8145060$; *b)* $\frac{\binom{90}{5}}{\binom{45}{6}}=\frac{18\cdot 89\cdot 11\cdot 29\cdot 86}{15\cdot 44\cdot 43\cdot 7\cdot 41}=\frac{3\cdot 89\cdot 29}{5\cdot 7\cdot 41}\approx 5{,}4.$

3034 $\binom{9}{3}=84.$

3035 $\binom{7}{3}=35.$

3036 $\binom{60}{4}=487635.$

3037 A Pascal-háromszög előállításából adódóan szimmetrikus, és az értékek a sorok elején növekednek a szimmetriatengelyig. Így ha páros számról van szó, a felét kell aláírnunk. Páratlanokra két megoldást is kapunk: egyik a szám felének egészrésze, másik az ennél eggyel nagyobb egész. A konkrét példában:

a) $k=12$, $\binom{24}{12}=2704156$; *b)* $k=6$ vagy $k=7$, $\binom{13}{6}=\binom{13}{7}=1716.$

3038 *a)* A törpök közül $\binom{12}{4}=495$-féleképp válogathat ebédre négyet Hókuszpók.

b) A maradék nyolc főből választanak először kettőt, majd a maradék hatból ismét kettőt. Mivel ezeket egymástól függetlenül meg tudják tenni, össze kell őket szoroznunk: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}=420.$

3039 A lehetőségek száma: $\binom{9}{3}\cdot\binom{4}{2}=504.$

3040 *a)* A négykerekű autó mind a négy kerekére négy csavar kell, így a válasz: $\binom{60}{16}$.

b) Ha külön-külön vesz ki csavarokat a dobozból Sanyi, akkor a következő adagot mindig néggyel kevesebb közül választhatja, $\binom{60}{4}\cdot\binom{56}{4}\cdot\binom{52}{4}\cdot\binom{48}{4}$-féleképp.

c) Az *a)* eset kifejtve egyszerű: $\binom{60}{16}=\frac{60!}{16!\cdot 44!}$. Most *b)* esetet is fejtsük ki:

$$\binom{60}{4}\cdot\binom{56}{4}\cdot\binom{52}{4}\cdot\binom{48}{4}=\frac{60!}{4!\cdot 56!}\cdot\frac{56!}{4!\cdot 52!}\cdot\frac{52!}{4!\cdot 48!}\cdot\frac{48!}{4!\cdot 44!}=\frac{60!}{(4!)^4\cdot 44!}.$$

Az egyszerűsítések után maradt alakokból – mivel $16!>(4!)^4$ – már látható, hogy a *b)* esetben több lehetőségünk van a csavarok kiválasztására.

Végül osszuk el a *b)*-ben kapott eredményt az *a)*-ban kapottal. Így $\frac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$-hoz jutunk, ami megfelel 16 elem 4, 4, 4, 4-tagú ismétléses permutációinak. Azaz ha az *a)* esetben figyelembe vesszük ezt a sorrendet is (vagy a *b)* esetben eltekintünk tőle), akkor a két eset egyenlő lesz.



3041 *a)* Ha a piros király a leosztott lapok között van, akkor a maradék 31-ből kell még mellé tenni hármat: $\binom{31}{3} = 4495$.

b) Ez az eset három egymást kizáró alesetből áll össze: piros, de nem király; piros király; nem piros, de király. A három esetben összesen 11 lap van (7 + 1 + 3), melyekből bele kell kerülnie egynek a leosztott négy lap közé. A többi három leosztott lap a maradék 21 lapból kerülhet ki. A megoldás: $\binom{11}{1} \cdot \binom{21}{3} = 14\,630$.

c) A „legalább” szó gyanús lehet, inkább számoljuk ki a kérdezett eset ellentétét (komplementerét). Ekkor arra kell válaszolnunk: hányféleképp fordulhat elő, hogy a leosztott négy lap között nincs sem piros, sem király lap? Azokból a lapokból, melyek nem pirosak és király sincs rajtuk, 21 van. A megoldást úgy kapjuk, ha kivonjuk az összes esetből az ellentettet: $\binom{32}{4} - \binom{21}{4} = 29\,975$.

3042 Az autószerelős feladathoz hasonló szorzatot kell felírnunk: $\binom{52}{3} \cdot \binom{49}{3} \cdot \binom{46}{3} \cdot \binom{43}{3}$. Az ottanihoz hasonlóan elvégezve az egyszerűsítéseket: $\frac{52!}{(3!)^4 \cdot 40!} \approx 7{,}6 \cdot 10^{16}$.

3043 **I. megoldás.** A „legalább egy ász” ellentéte, ha nincs ász a leosztásban. Mivel összesen négy ász van a pakliban, így az ellentétes eseteket az összes esetből kivonva a megoldás: $\binom{32}{4} - \binom{28}{4} = 15\,485$.

II. megoldás. A „legalább egy” jelent egy, kettő, három vagy négy ászt. Ez négy eset, lássuk részletesebben az egyiket, mondjuk a három ászt. Ekkor a csomagban levő négyből három bekerül a leosztásba, a maradék egyet pedig a nem ászok közül töltjük fel, $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1}$-féleképpen. A többi esetet is kiszámíthatjuk, összegük adja a megoldást:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{0} = 15\,485.$$

3044 A „legfeljebb egy” tök lehet egy vagy nulla darab. Ez csak két eset, nincs értelme áttérni az ellentett eseményre, hiszen ott hét alesetet kellene összeírni. Lássuk hát.
Ha nincs tök a leosztásban, akkor a pakliban levő nyolc lapból nulla darab kerül a négy lap közé, az összes többi piros, zöld vagy makk: $\binom{8}{0} \cdot \binom{24}{4} = 10\,626$. Ha egy tök van, akkor piros, zöld, makk lehet három: $\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{3} = 16192$. A megoldás a kettő összege: $\binom{8}{0} \cdot \binom{24}{4} + \binom{8}{1} \cdot \binom{24}{3} = 26818$.

3045 Gondoljunk át részletesen egy esetet, például a három találatot. Hármasunk úgy lehet, ha az öt nyerőszámból megjelöltünk (kiválasztottunk) hármat, a maradék két tippünknek viszont a nem nyerő 85 számból kell kikerülnie. Ez alapján minden esetet számba vehetünk. Ha nincs találatunk, akkor minden megjelölt számunk a „nem nyert”-ek közül kerül ki. Ha pedig telitalálatunk van, akkor ott minden megjelölt tipp a nyerőszámok közül kerül ki.

a) $\binom{5}{0} \cdot \binom{85}{5} = 32\,801\,517$; *b)* $\binom{5}{1} \cdot \binom{85}{4} = 10\,123\,925$; *c)* $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} = 987\,700$;

d) $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 35\,700$; *e)* $\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 425$; *f)* $\binom{5}{5} \cdot \binom{85}{0} = 1$.

Figyeljük meg, hogy az összes lehetséges számötösök darabszáma $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$, ami a fentiek összege. Ez azért lehet, mert az összes esetet egymást kizáró alesetekre bontottuk.



3046 Egy kézfogás létrejöttéhez két ember kell. A kérdést módosíthatjuk így is: hány főből választhatunk ki összesen 45-féleképp kettőt? Vagy: határozzuk meg n természetes számot, amire $\binom{n}{2} = 45$. Ez nem bonyolult, csak írjuk fel „n alatt k” definícióját, és egyszerűsítsünk le $(n-2)!$-sal:

$$\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 45.$$

Utóbbi egyenlőséget tekintsük önálló egyenletnek és tüntessük el a törteket, bontsuk fel a zárójelet, majd rendezzük egy oldalra. Így az $n^2 - n - 90 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, aminek megoldásai: $n_1 = 10$ és $n_2 = -9$. Nekünk a feladat szövege szerint csak a természetes számok jöhetnek szóba, így a tárgyaláson 10 fő volt jelen.

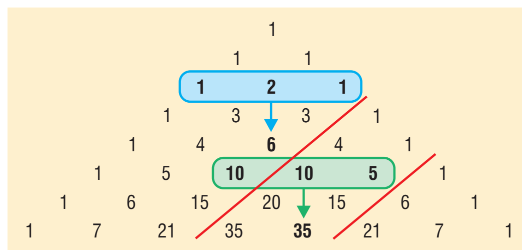
3047 Csak ki kell fejtenünk a bal oldalon álló kifejezéseket, majd közös nevezőre hozzuk őket:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

A végén kiemeltünk $(n-1)!$-t, és összevontunk a zárójelben. Így éppen $(n-1)!\cdot n = n!$ formát kapjuk, és készen is vagyunk.

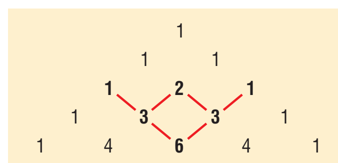
3048 *a)* Az összefüggéshez egy soron belül kell három egymást követő számot találni (vagyis legalább a második sorból – lásd az ábrán), például:

$$1 + 2\cdot 2 + 1 = 6,$$
$$10 + 2\cdot 10 + 5 = 35.$$



A kapott értékek két sorral lejjebb találhatók (innen az $n + 2$), és mivel a soron belül az azonos sorszámú tagok ferdén balra dőlve követik egymást (piros vonal), így az összeadandók közül az utolsó sorszámával egyezik meg az eredmény (innen a $k + 1$).

b) A bizonyítást elvégezhetnénk a definíció alapján is, azonban hosszadalmas és nem jelent újat az előző feladathoz képest. Ezért próbálkozzunk magával az ott tárgyalt összefüggéssel:

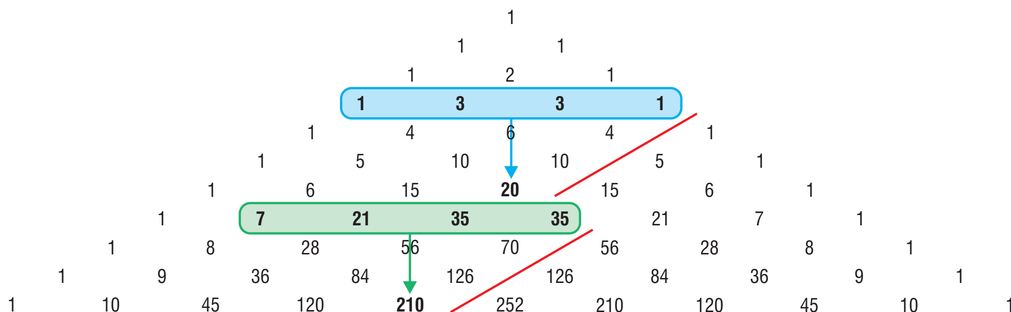


$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$

Érdemes az ábrán is követni a levezetést.

3049 *a)* A feladat az előző példához nagyon hasonlít, csak itt négy darab egy sorban, egymás után álló számot kell összeadnunk (ezért aztán leghamarabb a harmadik sorban tekinthetjük). Ott pedig

$$1 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3 + 1 = 20 \quad \text{vagy később} \quad 7 + 3\cdot 21 + 3\cdot 35 + 35 = 210.$$





b) A 20 és 210 értékeket három sorral lejjebb, az utolsó értékkel azonos sorszámú helyen találjuk. Azaz a sejtésünk:

$$\binom{n}{k-2}+3\cdot\binom{n}{k-1}+3\cdot\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+3}{k+1}.$$

c) Az igazoláshoz használjuk fel hétszer az $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ összefüggést. A 3-as szorzó szükséges, ugyanis ha csak kétszer vennénk a középső elemeket, akkor például: $7+21=28$; $21+35=56$; $35+35=70$. Ezen három számból csak az egyik oldalon folytathatnánk, hiszen 56 egyszer szerepel. A középső elemet ezért meg kell dupláznunk, amihez három darab 21 és három darab 35 kell.

Megjegyzés: Az előző két feladatot természetesen lehet általánosítani, bővítve a számok sorát. Érdemes észrevennünk, hogy az együtthatók is a Pascal-háromszögből valók. Azonban most részletesebben egy további általánosításra hívjuk fel a figyelmet. Írjuk le az első sorokat, ahol az összefüggések előfordulhatnak így:

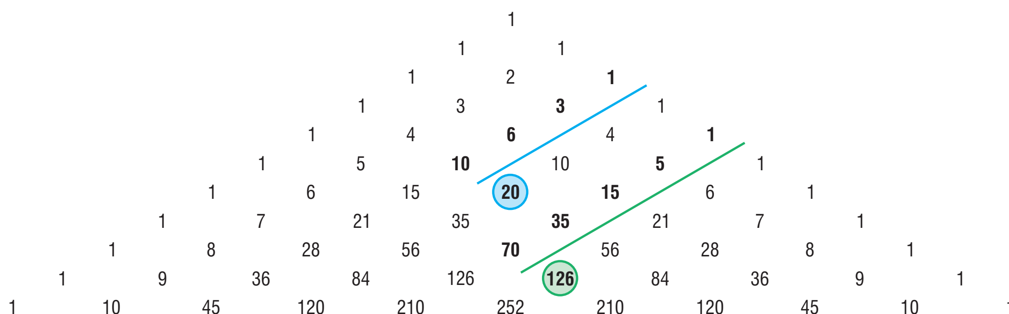
$$1^2+2^2+1^2=\binom{2}{0}^2+\binom{2}{1}^2+\binom{2}{2}^2=\binom{4}{2} \quad \text{és} \quad 1^2+3^2+3^2+1^2=\binom{3}{0}^2+\binom{3}{1}^2+\binom{3}{2}^2+\binom{3}{3}^2=\binom{6}{3}.$$

Általánosítva megfigyelésünket, új sejtéshez juthatunk. Próbáljuk meg bebizonyítani, hogy

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

3050 *a)* Az összefüggés az egymás utáni sorokban ugyanazon sorszámú helyeken álló számok összege, mindig a sorvégi szélső értéktől kezdve. Például:

$$1+3+6+10=20 \quad \text{vagy} \quad 1+5+15+35+70=126.$$



b) Úgy tűnik, az összeg mindig az eggyel lejjebb levő sor eggyel hátrébb levő eleme. Sejtésünk:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

c) A bizonyítást elvégezhetjük rögzített k-ra n szerinti teljes indukcióval, de bevethetünk egy apró trükköt is. Igaz ugyanis, hogy

$$\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}, \quad \text{ahonnan} \quad \binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1}.$$

Így az első kéttagú összeg egybeolvad, majd a következő kettő újra és így tovább. Nem teszünk mást, mint újra és újra felhasználjuk az $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ összefüggést. Tulajdonképpen egy „teleszkopikus” összeghez jutunk.



d) Az összeg $k=1$-re a következő alakot ölti:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2},$$

vagy ugyanez másképp írva:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Ez pedig nem más, mint az első n természetes szám összegére vonatkozó összefüggés.

Megjegyzés: Játsszunk még az összefüggéssel. Használjuk ki a Pascal-háromszög szimmetriáját, és tükrözzük a szimmetriatengelyre a szereplő tagokat. Felhasználva az $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ összefüggést, a következő alakhoz jutunk:

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1-k}+\binom{n}{n-k}=\binom{n+1}{n-k}.$$

A *c)* részben leírt trükkel ezt is igazolhatjuk, ha felhasználjuk, hogy $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$.

3051 A kérdés kicsit másként fogalmazva: oldjuk meg a $\binom{13}{k}=715$ egyenletet. Ezt próbával vagy a definíció alapján tudjuk megtenni. Lássuk a „tudományosabb" módszert. Eltüntetve a törtet:

$$\frac{13!}{k!\cdot(13-k)!}=715,$$

$$8709120=k!\cdot(13-k)!$$

A jobb oldalon egy egész számokból álló szorzat – sőt két szorzat szerepel. Ráadásul mindkettő 1-től kezdve halad az egymás utáni egészeken, így tartalmaz sorozatban egyforma tényezőket is. Tehát várhatóan bizonyos értékek duplán szerepelnek a 8 709 120 szorzattá bontásában. Lássuk a prímtényezős felbontást:

$$8\,709\,120=2^{10}\cdot3^5\cdot5\cdot7.$$

A 7 és 5 prímtényező biztosan egyszer szerepel, így azok csak a hosszabb szorzat előállításában vehetnek részt. A köztük levő 6 is egyszer szerepel, előállításához egy 2 és egy 3 prímtényező szükséges. Az 5 előtt kell lennie az $1\cdot2\cdot3\cdot4$ szorzatnak, ami elvisz három 2 és egy 3 prímtényezőt. Eddig elfogyasztottunk négy darab 2, kettő darab 3, egy 5 és egy 7 prímet. Maradt $2^6\cdot3^3$. A három 3 prímből nem tehetünk kettőt a rövidebb szorzatba, mert akkor el kellene jutnunk 6-ig. Így kettő marad a hosszabban, azaz ott lesz 9 is és így 8 is. Ezzel újabb prímeket használunk el, marad $2^3\cdot3$. Ez pedig pont elég az $1\cdot2\cdot3\cdot4$ szorzathoz. Vagyis $8\,709\,120=4!\cdot9!$ és így $k=4$ vagy $k=9$.

Tehát 13 főből 4 vagy 9 főt tudunk 715-féleképpen kiválasztani.

3052 A kérdés átfogalmazva: oldjuk meg a természetes számokon az $\binom{n}{7}=77520$ egyenletet! Ennek is nekiláthatunk próbálgatással, ám abból nem sokat tanulunk. Az előző példához hasonlóan kezeljük a kérdést:

$$\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!}=77520,$$

$$\frac{n!}{(n-7)!}=390700800.$$

Rutinosan prímtényezőkre bonthatjuk a jobb oldalt (rögtön válasszuk le a végéről a $100=2^2\cdot5^2$-t):

$$390\,700\,800=2^8\cdot3^3\cdot5^2\cdot7\cdot17\cdot19.$$



Figyeljük meg a másik oldalt is, itt n-től lefelé hét darab egymás után következő egyre kisebb szám szorzata szerepel. Mivel a 17 és 19 prímek, így valószínűleg szerepelnek a szorzatban. Köztük találjuk a $18 = 2 \cdot 3^2$-t is. Várhatóan 7-ig nem jut el 19-től a szorzat, ezért $14 = 2 \cdot 7$-et kell keresnünk vagy $21 = 3 \cdot 7$-et. Bármelyik is szerepel, a szorzat szélén kell állnia. Ugyanis van két 5-ös prímtényező is, egyik lehet a $15 = 3 \cdot 5$ építőköve, másik pedig a $20 = 2^2 \cdot 5$-é.

Gyűjtsük össze a felbontásból eddig elhasznált prímeket:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19.$$

Maradt még egy darab 2 és egy darab 7, tehát a megoldás:

$$390\,700\,800 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14.$$

Vagyis 20 főből választhatunk $77\,520$-féleképp 7-et. Másik megoldás nincs.

3053 A feladatra azonnal adhatunk két magától értetődő megoldást: a 8568. sor 1. eleme és a 8568. sor 8567. eleme is 8568. Igen ám, de található-e más lelőhelye a Pascal-háromszögben a jelzett számnak?

Most is fogalmazzuk meg másként a kérdést: mely n és k $(n \ge k \ge 0)$ természetes számra teljesül, hogy $\binom{n}{k} = 8568$?

Az előző pontban az $\binom{8568}{1} = \binom{8568}{8567} = 8568$ megoldást adtuk meg.

Próbálgatással most nem sokra megyünk, mert sok az ismeretlen. Vegyük hát a definíciót, bontsuk fel a 8568-at prímekre, és gondolkodjunk:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17.$$

A bal oldalt tekintsük úgy, hogy a több tényezőből álló szorzattal leegyszerűsítettünk, legyen ez most az $(n-k)!$ (A szimmetria miatt nem fontos, melyiket tekintjük.)

A túloldalon van egy 17-es prímtényező, ami elég nagy ahhoz, hogy ne egyszerűsített alakból kapjuk. Feltehetjük, hogy a 17 szerepel a bal oldal számlálójában. Nézzük a 17 körüli számokat, például az előző feladathoz hasonlóan $18 = 2 \cdot 3^2$-t is ki tudjuk rakni a prímekből és $14 = 2 \cdot 7$-et is. 19 nem szerepel, így biztosan tudjuk, hogy legfeljebb $n = 18$. 13 sem szerepel, tehát vele már egyszerűsítettünk. A 18 és 14 között lennie kellett $15 = 3 \cdot 5$ és $16 = 2^4$-nek. Hat darab 2-es prímünk azonban nincs a felbontásban – ez azért lehet, mert a szorzatot egyszerűsítettük $k!$-sal. Most nézzük meg azt, mi hiányzik a teljes $14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18$ szorzatból, ennek árulkodnia kell az osztó $k!$-ról:

$$14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 5) =$$
$$= (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (5!).$$

Elkészültünk hát: $k = 5$ és $n = 18$ megoldást ad. Ugyanígy a szimmetria miatt megoldás $k = 13$ is.

Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció – megoldások

3054 *a)* $9 - 6b + b^2$;

b) $e^3 + 6e^2f + 12ef^2 + 8f^3$;

c) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$;

d) $32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$;

e) $1 - 3{,}5a + 5{,}25a^2 - 4{,}375a^3 + 2{,}1875a^4 - 0{,}65625a^5 + 0{,}109375a^6 - 0{,}0078125a^7$.



3055 *a)* $x^{12}+12x^{11}+60x^{10}+160x^9+240x^8+192x^7+64x^6$;

b) $256a^8-512a^7b+448a^6b^2-224a^5b^3+70a^4b^4-14a^3b^5+\frac{7}{2^2}a^2b^6-\frac{1}{2^3}ab^7+\frac{1}{2^8}b^8$;

c) $x^3+9x^3\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+36x^4\cdot\sqrt[3]{x}+84x^5+126x^5\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+126x^6\cdot\sqrt[3]{x}+84x^7+$
$+36x^7\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+9x^8\cdot\sqrt[3]{x}+x^9$;

d) $x^7+21x^6\cdot\sqrt{x}+189x^6+945x^5\cdot\sqrt{x}+2835x^5+5103x^4\cdot\sqrt{x}+5103x^4+2187x^3\cdot\sqrt{x}$;

e) $64x^6-576x^8+2160x^{10}-4320x^{12}+4860x^{14}-2916x^{16}+729x^{18}$.

3056 *a)* $1-2\cdot\sin x\cdot\cos x$; *b)* $4\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x+4\cdot\sin x\cdot\cos x+1$.

3057 *a)* $(2a+b)^3$; *b)* $(0{,}5x^2-2y)^3$; *c)* $\left(x^2-x^3\right)^4$; *d)* $\left(\sqrt{x}+x\right)^4$.

3058 *a)* 2; *b)* 4; *c)* 32; *d)* 1.

3059 *a)* Üres halmaz. *b)* 1. *c)* Nincs ilyen halmaz. *d)* 4.
e) 8. *f)* Nincs ilyen halmaz.

3060 Minden bit értéke 0 vagy 1 lehet. Mivel a shortint és az integer egész számok, ezért lehetnek negatívok is: kell hagynunk az előjelnek egy bitet (az elsőt). A szám értékének rögzítéséhez így 7, illetve 15 bit marad. A legnagyobb érték ezért (a 0-t se feledjük el!):

a) shortint esetén: $2^7-1=127$; *b)* integer esetén: $2^{15}-1=32\,767$.

A részhalmazok számát csak a halmazban levő elemek száma határozza meg, így shortint típusú számból $128+1+127=256$ darab lehet, integerből pedig $32\,768+1+32767=65\,536$. A válasz:

c) 2^{256}; *d)* 2^{65536}.

3061 A két megadott szám a lányok és a fiúk részhalmazainak száma. Vagyis kérdés, hogy 2-nek melyik hatványa az, aminek értéke 1024. Hamar kitaláljuk, $2^{10}=1024$. A fiúknál ugyanez $2^{13}=8192$. Ebből adódik, hogy a lányok tízen, a fiúk tizenhárman vannak az osztályban, tehát az osztálylétszám összesen huszonhárom. Tehát 2^{23}-féleképpen választható ki egy csoport az egész osztályból.

Megjegyzés: Hamarosan megtanuljuk általánosan is megoldani a $2^x=1024$, ún. *exponenciális* egyenleteket.

3062 Képzeljük el a csapat összes tagját egymás mellett állva a bemutatáskor. A belőlük képezhető részhalmazokat jelölhetjük úgy is, hogy egy mínuszjelet képzelünk afölé, aki nem tagja; és egy plusz jelet afölé, aki tagja a részhalmaznak. Mind a tizenegy játékos felett vagy plusz, vagy mínusz jel állhat, így 2^{11} lehetőség van különböző részhalmazok képzésére.

a) Most ha az Enikő feletti jelet mínusznak rögzítjük, akkor csak a többiek jele változhat, tehát a megoldás 2^{10}.

b) Az előző részhalmazokat úgy kaptuk, hogy Enikő jelét mínusznak vettük. Hagyjuk hát ezt így, és most legyen Évike jele plusz. Ezt is rögzítettük, szabadon választható marad kilenc fő, a megoldás 2^9.

c) Ebben a kérdésben öt főt kell rögzítenünk (az mindegy, hogy plusz- vagy mínuszjelet rögzítünk a játékos felett képzeletben). Szabadon hat főt választhatunk, a képezhető részhalmazok száma 2^6, ami éppen $2^5=32$-ed része az összes lehetőségnek.

3063 *a)* A fociban semmi sem tiltja, hogy két vagy több szabadrúgást ne végezhessen el ugyanaz a játékos. Mivel ebben az esetben az időbeli sorrendet is figyelembe vesszük, így 8 fő közül kell kiválasztani az első, a második stb. szabadot rúgó játékost (ismétléses variáció):

$$8^{16}\approx 2{,}8\cdot 10^{14}.$$



b) A sorrend most nem számít, ezért ismétléses kombinációt kell számolnunk. A tizenegy játékosból elhagyva a három csatárt, 8 elem 16 tagú ismétléses kombinációinak száma:

$$\binom{8+16-1}{16}=245157.$$

c) Ebben a részfeladatban a csatárokat engedjük szabadrúgást lőni, de a kapust nem. Megint ismétléses variációt számolunk, az eredmény:

$$10^{13}.$$

d) A sorrendre való tekintet nélkül ismétléses kombinációhoz jutunk:

$$\binom{10+13-1}{13}=497420.$$

Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag) – megoldások

3064 *a)* $\binom{100}{4}=3921225;$ *b)* $4!=24;$

c) $\binom{n}{k}\cdot k!=\frac{n!}{(n-k)!}$, n elem k tagú ismétlés nélküli variációinak száma.

3065 *a)* $\frac{32!}{(32-4)!}=863040;$

b) $\frac{32!}{(32-4)!}:4!=\binom{32}{4}=35960$, 32 elem 4 tagú ismétlés nélküli kombinációinak száma.

3066 $\binom{30}{8}\cdot 7!$

3067 *a)* $3!;$ *b)* $12!;$

c) $\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}\cdot 3!=166320;$ *d)* $3!\cdot(6\cdot 5+4\cdot 10\cdot 3+10\cdot 3)=1080.$

3068 *a)* $\frac{9!}{(9-5)!}-\frac{8!}{(8-5)!}=5\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=8400;$ *b)* $\binom{9}{5}-\binom{8}{5}=\binom{8}{4}=70.$

3069 *a)* Kétféle megoldás is eszünkbe juthat. A „számolós” megoldáshoz fejtsük ki a két oldalt, majd amivel csak lehet, egyszerűsítsünk, és tüntessük el a törteket:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!},$$

$$n-k+1=k,$$

$$n=2k-1.$$

Megoldáspárokat kapunk, ezeket egy táblázatba is foglalhatjuk:

k	1	2	3	4	5	…
n	1	3	5	7	9	…

Vagyis például hét elemből annyiféleképpen tudunk kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül négyet, mint hármat. Öt elemből pedig annyiféleképp tudunk kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül hármat, mint kettőt.



b) Az előző esethez hasonló átalakításokkal ebben az esetben

$$(n-k+1)\cdot(n-k+2)=(k-1)\cdot k$$

alakhoz jutunk. A zárójeleket kifejtve, és rendezve az egyenletet:

$$n^2+(3-2k)\cdot n+2-2k=0.$$

Tehát n ismeretlenben másodfokú egyenletet kaptunk k paraméterrel. Felírva és egyszerűsítve a megoldóképletben szereplő kifejezéseket:

$$n_{1,2}=\frac{2k-3\pm(2k-1)}{2}.$$

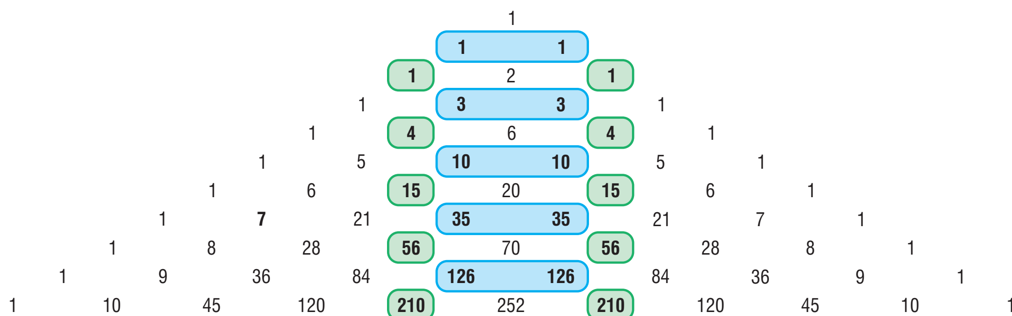
Az összeadással $n_1=2k-2$. A kivonással kapott, k-tól független $n_2=-1$ eredményt nem tudjuk értelmezni. A táblázat a megoldáspárokkal már ismerős lehet.

k	2	3	4	5	6	…
n	2	4	6	8	10	…

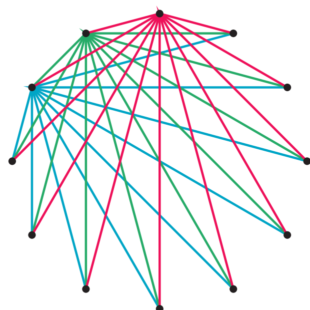
A kombinatorika nyelvére fordítva ez azt jelenti, hogy pl. hat elemből annyiféleképpen lehet négyet kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül, mint kettőt.

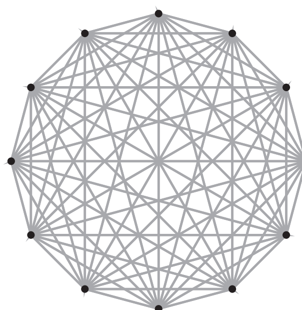
Megjegyzés: A feladat adja az általánosítás lehetőségét: mely n, k, r megfelelő pozitív egész értékekre igaz, hogy $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-r}$? Azonban az eddig alkalmazott módszerrel várhatóan n-ben r-edfokú egyenletet kapunk.

A fenti eljárás helyett sokkal egyszerűbb, ha felhasználjuk, hogy a binomiális együtthatók építik fel a Pascal-háromszöget. A kékkel jelölt értékek adják az *a)* részben feltett kérdésre a választ, a zöldek pedig a *b)* részfeladatra. Indoklásképpen elegendő a Pascal-háromszög szimmetriájára hivatkoznunk. Így az általánosított kérdést is meg tudjuk válaszolni minden lehetséges n, k és r értékre.



3070 Ábrázoljuk a csapatokat és a köztük lezajló mérkőzéseket.







a) Sorban haladva az első csapat 11 mérkőzést játszik (piros). A második már játszott az elsővel, így 10 új mérkőzést játszik (zöld). A harmadik már játszott az első kettővel (kék) stb.:

$$11 + 10 + 9 + \ldots + 1 = 66.$$

b) A másik ábrát tekintve minden csapat 11 mérkőzést játszik. Azonban figyelembe kell vennünk, hogy két csapat csupán egyetlen egyszer találkozik, mi viszont minden meccset kétszer számoltunk (egyszer az egyik, egyszer a másik csapatnál). A helyes eredmény:

$$\frac{11 \cdot 12}{2} = 66.$$

c) Bármely mérkőzés létrejöttéhez két csapat szükséges. A feladat átfogalmazható így: hányféleképp lehet kiválasztani 12 elemből kettőt ismétlés nélkül? A válasz pedig:

$$\binom{12}{2} = 66.$$

Megjegyzés: Ha a feladatot általánosítjuk, az *a)* és *b)* részből adódik az első n természetes szám összegére korábban már megismert képlet is:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

3071 *a)* A legalább kettő 8-as jelenthet kettőt, hármat, négyet vagy ötöt. Inkább számoljuk a komplementer eseményt, ha nincs vagy egy 8-as van. Az összes esetek száma (ismétléses variáció) 9^5. Nincs 8-as a számok között 8^5 esetben. Az egyetlen 8-as állhat öt helyen, a többi helyre a maradék nyolc érték valamelyikét írhatjuk: $5 \cdot 8^4$. Az eredmény a fenti értékek különbsége:

$$9^5 - 8^5 - 5 \cdot 8^4 = 5801.$$

b) Most is érdemes áttérni az ellentett esetek összeszámlálására, azonban itt ismétléses kombinációkat kell felírnunk (tankönyvben apró betűs rész). Az összes esetekben kilenc számból választunk ki ismétléssel ötöt: $\binom{9+5-1}{5}$. Ha nincs közöttük 8-as, akkor már csak nyolc számból választunk ötöt ismétléssel: $\binom{8+5-1}{5}$. Ha egy 8-as van a számok között, akkor a többi négyet a maradék nyolc értékből választhatjuk, szintén ismétléssel: $\binom{8+4-1}{4}$. A végeredmény:

$$\binom{13}{5} - \binom{12}{5} - \binom{11}{4} = 165.$$

3072 *a)* A fagylalt átvétele 20 elem 4 tagú ismétlés nélküli variációja, ezek száma $\frac{20!}{(20-4)!}$.

A pénz átadása 11 elem valamely 5, 3, 3 tagú ismétléses permutációja, számuk $\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 5!}$.
Az eredmény a kettő szorzata:

$$\frac{20! \cdot 11!}{(20-4)! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5!}.$$

b) A fagylaltot 20 elem 3 tagú ismétlés nélküli kombinációjaként kapjuk, számuk $\binom{20}{3}$.

A 2, 2, 1 darab érmét ki kell választanunk az 5, 3, 3 darab azonos közül, ezt $\binom{5}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{1}$-féleképp tehetjük meg. Az eredmény:

$$\binom{20}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1}.$$



c) A fagylaltot 20 elem 5 tagú ismétléses variációjaként kapjuk, összesen 20^5-féleképpen. A fizetés az előző részkérdéshez hasonlóan zajlik. Az eredmény ekkor:

$$20^5 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}.$$

d) Utoljára 20 elem egy 7 tagú ismétléses kombinációját kell tekintenünk, erre $\binom{20+7-1}{7}$ különböző lehetőségünk van.

Az érmék kiválasztása most is $\binom{5}{2}$, $\binom{3}{3}$, $\binom{3}{1}$-féleképp történik, azonban mivel egyesével számoljuk le őket, sorrendjük is számít (6 elem 2, 3, 1 tagú ismétléses permutációja). Az eredmény:

$$\binom{20+7-1}{7} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!}.$$

3073 *a)* Az első játékos az eredeti 52 lapból kap 5-öt, ezt $\binom{52}{5}$-féleképp adhatja neki az osztó. A második játékosnak már csak a maradék 47 lapból jut 7 darab, $\binom{47}{7}$-féleképp. Ezt követően az első játékos $\binom{5}{2}$-féleképp dobhat 2 lapot a kezében levő 5-ből. A második játékosnak a dobásra $\binom{7}{4}$ lehetősége van. A ledobott hat lapot ezután 6!-féleképp tehetik egyenes sorba. Az eredmény a fentiek szorzata, hiszen egymástól nem függő eseményekről van szó:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{7} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot 6!$$

b) A kör alakú elrendezés esetén csak a feladat vége változik:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{7} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot 5!$$

Hatszor több lehetőségünk van a játékban egyenes sorban elhelyezni a lapokat, mint kör alakban.

3074 *a)* A lapok leosztásakor most sem vehetjük figyelembe a sorrendet, így a lehetséges leosztások száma:

$$\binom{52}{4} \cdot \binom{48}{6} \cdot \binom{42}{8}.$$

b) Az előbbihez hasonlóan:

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1}}{k_r}.$$

c) Fejtsük ki elsőnek az *a)* részt. Két helyen is egyszerűsíthetünk:

$$\binom{52}{4} \cdot \binom{48}{6} \cdot \binom{42}{8} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} \cdot \frac{48!}{6! \cdot 42!} \cdot \frac{42!}{8! \cdot 34!} = \frac{52!}{4! \cdot 6! \cdot 8! \cdot 34!}.$$

A *b)* esetben is hasonlóan végezhetünk egyszerűsítéseket:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1})!}{k_r! \cdot (n-k_1-k_2-\ldots-k_r)!} =$$

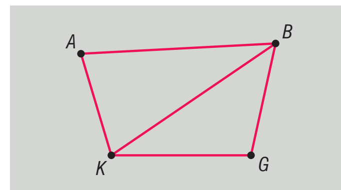
$$= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r! \cdot (n-k_1-k_2-\ldots-k_r)!}.$$

Mindkét esetben megfigyelhetjük, hogy a nevezőben levő faktoriálist kijelölő számok összege (pl. 4 + 6 + 8 + 34 = 52) kiadja a számlálóban szereplő számot. Ilyet korábban az ismétléses permutációnál láttunk (52 elem 4, 6, 8 és 34 tagú permutációinak száma ennyi).

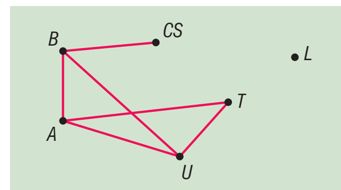


GRÁFOK – pontok, élek, fokszám – megoldások

3075 A keresett gráf az ábrán látható.

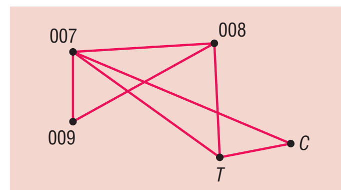


3076 A keresett gráf az ábrán látható.



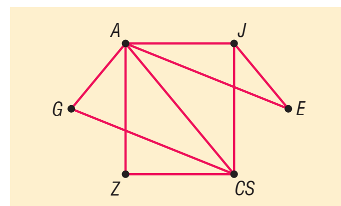
3077 *M–J*, *M–G*, *J–H*, *J–G*, *N–G*.

3078 A keresett gráf az ábrán látható.

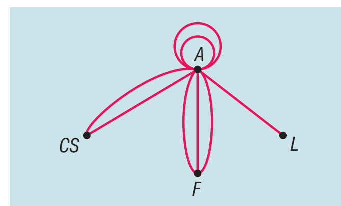


3079 *a)* 2–6–3; *b)* 5–3–6–4.

3080 *a)* A keresett gráf az ábrán látható.
b) Gábor és Zoli.



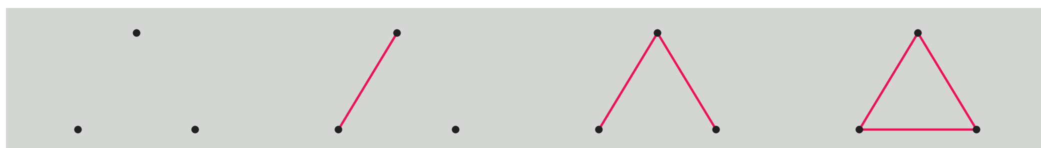
3081 A keresett gráf az ábrán látható.



3082 *a)* Például: buszforduló, zsákutca.
b) Egy utcáról lakótelepre vezető út két bejárattal.

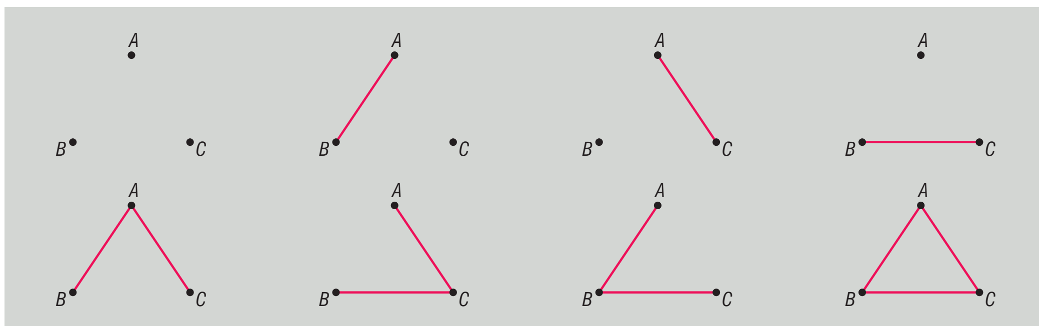
3083 Nem.

3084 *a)* A keresett négy gráf az ábrán látható.



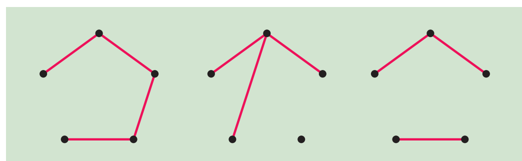


b) A keresett nyolc gráf az ábrán látható.

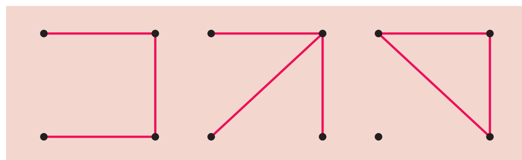


3085 *A*: 5, *H*: 4, *G*: 2, *N*: 4, *J*: 2, *M*: 3.

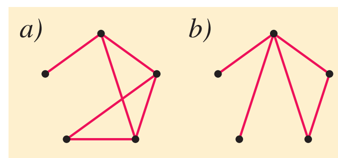
3086 A keresett gráfok az ábrán láthatók.
a) 4;
b) 3;
c) 3.



3087 Három lehetőség van:
1, 1, 2, 2; 1, 1, 1, 3; 0, 2, 2, 2.
A keresett gráfok az ábrán láthatók.

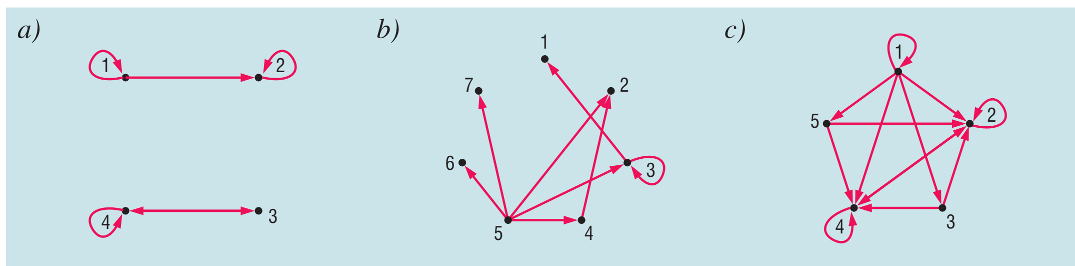


3088 Az *a)* és *b)* részfeladat megoldása az ábrán látható.
c) Ilyen gráf nem létezik.

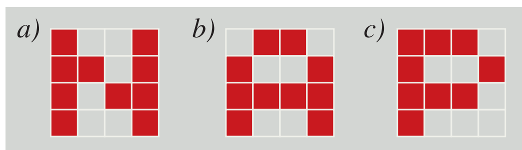


3089 *b)* Várhatóan a négyfokúakból.

3090 A keresett gráfok az ábrán láthatóak.



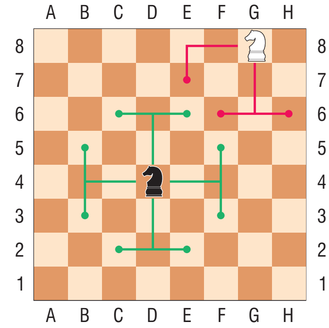
3091 A keresett betűk sorban:





3092 A huszár lépési szabálya alapján az ábrán látható helyekre juthat el a megjelölt pontokból. Így

a) G8 pont fokszáma 3; *b)* D4 pont fokszáma 8. (➡)



3093 Tekintsük végig a figurákat. A király nem ilyen, hiszen a sarokban (3) kevesebb lehetősége van lépésre, mint a tábla közepén (9). A vezérnek hasonlóan a királyhoz, a sarokban állva (21) kevesebb a lehetősége, mint a középső négy mezőben (27). A futónak a sarokból indulva 7, míg a középső négy mező valamelyikéből 13 lépési lehetősége van. A bástya azonban a sarokból (14) ugyanannyi lépést tehet, mint középen állva (14). Úgy tűnik, hasonló a helyzet a gyaloggal: az üres táblán mindig egyet léphet előre, így a köztes mezőket jelölő gráfpontok fokszáma 2 – azonban a tábla kiindulópontjáról csak előre léphet egyet, így ezen pontok fokszáma 1. Tehát az egyetlen megoldás a bástya.

3094 Tudjuk, hogy egy n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ éle van. Ha egy egyszerű gráfba már berajzoltunk n darabot, akkor még

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

élt kell megrajzolni, hogy teljessé váljon.

3095 Ha a berajzolható élek maximális számát keressük, akkor tekintsünk csak egyetlen izolált pontot a gráfban – ugyanis minél több izolált pontot képzelünk el, annál kevesebb élt rajzolhatunk meg. A maradék öt pont között akkor rajzoljuk a legtöbb élt, ha teljes gráfot készítünk. Ennek éleinek száma pedig

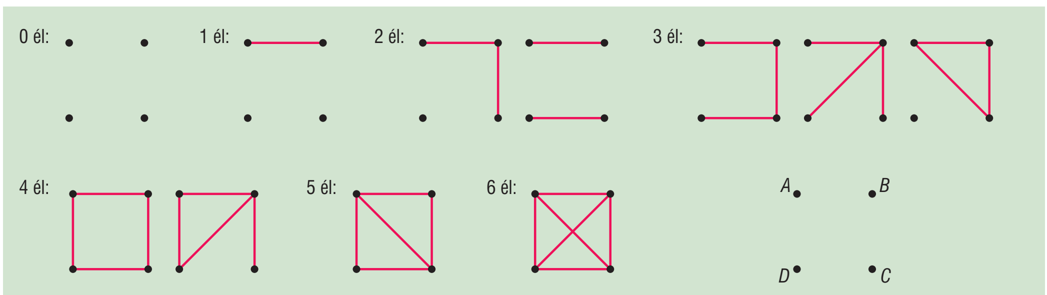
$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot (5-1)}{2} = 10.$$

3096 Akik 6-ot mondtak, azok összesen 7-en vannak egy nemzetből. Akik 4-et mondtak, azok 5-en. Azonban mivel 12 fő mondta a 4-et, legalább három ötfős különböző nemzet tagjai. Aki 2-t válaszolt, azok hárman vannak. Így mindkét kérdést megválaszolhatjuk:

a) Öt különböző nemzet tagjai dolgoznak a cégnél.

b) Összesen 18 főt kérdezett meg a főnök, maradt még 7 fő. 2 főnek kell még 6-ot, 3 főnek 5-öt, 2 főnek 2-t válaszolni a cégvezető kérdésére.

3097 *a)* Vigyünk rendszert az esetek összeszámlálásba. Vizsgáljuk meg, ha 0, aztán 1, majd 2, 3, 4, 5, 6 éle van az egyszerű gráfnak. A 11 megoldás az ábrákon látható.



Érdemes megfigyelni, hogy az egyes esetek szimmetrikusak: 0 élű eset annyi van, mint 6; 1 élű, mint 5; 2 élű eset pedig, mint 4. Ez abból adódik, hogy n élt berajzolni pontosan annyiféleképpen tudunk, mint n élt a teljes gráfból letörölni.



b) Az ábrán az üres *ABCD* gráfot tekintve hat különböző hely van. Ezek mindegyikére vagy rajzolunk élt, vagy nem. Ez élenként két lehetőség. Tehát az egyszerű gráfok száma $2^6 = 64$. (Ezzel biztosítottuk azt is, hogy a keletkező gráf valóban egyszerű lesz.)

3098 A 3097. feladat *b)* részét kell továbbgondolnunk. Tekintve az n pontú teljes gráf minden egyes élét, azt vagy hozzávesszük a kialakítandó egyszerű gráfunkhoz, vagy nem. Ez minden él esetében két lehetőség, az n pontú teljes gráf éleinek száma pedig $\binom{n}{2}$. A megoldás tehát $2^{\binom{n}{2}}$.

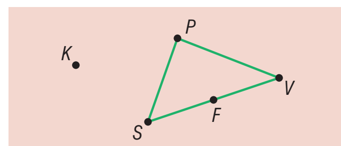
3099 Mivel a feladat egyszerű n pontú gráfokról szól, ezért a legnagyobb fokszámú pont fokszáma legfeljebb $n-1$. Tehát a feladatban kérdezett fokszámok csak $n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, 0$ lehetnek. Ez n darab különböző érték. Lehetséges-e ilyen gráf? Nem, mert az $n-1$ és a 0 fokszámok kizárják egymást: ha van $n-1$ fokú pont, akkor nincs 0 fokú és fordítva.

Megjegyzés: Ugyanezen gondolatmenettel igazolhatjuk, hogy minden egyszerű gráfban van legalább két azonos fokszámú pont. Ha ezt megtettük, a feladat megválaszolásához elegendő erre hivatkoznunk.

3100 *a)* A pontok fokszámai rendre K: 4, P, S, F, V: 2.

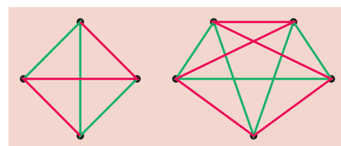
Összegük $4 + 4 \cdot 2 = 12$, azaz 6 élű a bejárt utak gráfja.

A teljes gráf $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ élű, vagyis 4 élű a komplementer.



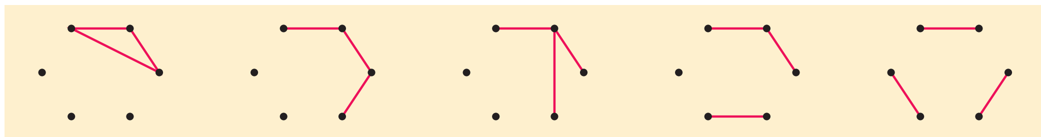
b) A gráfot és a komplementerét figyeljük úgy, mint egy teljes gráf két egymást kiegészítő része. Ha két gráf izomorf, akkor éleik száma egyenlő: csak páros sok éllel rendelkező teljes gráf jöhet szóba. Ilyenek az $n = 4k$ és az $n = 4k + 1$ pontú gráfok. Ez tehát egy szükséges feltétel.

A legkisebb ilyen gráf a 4 pontú, erre egy igen egyszerű megoldást találunk. Az 5 pontú esetben készíthetünk olyan részeket, amelyekben minden pont foka 2. Általában, $n = 4k + 1$ pont esetén $2k$ fokú pontokból felépíthetjük a gráfot, így a komplementer vele izomorf lesz.



Megjegyzés: az olyan gráfokat, amelyek izomorfak komplementerükkel, *önkomplementer gráfoknak* nevezzük.

3101 *a)* Haladjunk sorban a gráf pontjainak száma szerint. Mivel a gráf egyszerű és van három éle, legalább három pontjának is lennie kell. Hárompontú, háromélű gráf egy van. A négypontú és háromélű gráfokat a 3087. feladatban gyűjtöttük össze, három darabot találtunk. Ötpontú és háromélű gráfokat gyárthatunk a négypontúakból, csak vegyünk hozzájuk még egy izolált pontot. Ezeken kívül még egy lehetőségünk van: ha egy pontpárt elkülönítünk a többi háromtól. Hatpontú gráfokat hasonlóan tudunk gyártani az ötpontú gráfokból. Itt is csak egy további lehetőség van: ha elkülönítünk három, éllel összekötött pontpárt (utolsó ábra).



Hat pont esetében öt különböző háromélű egyszerű gráfot készíthetünk el. Ha tovább szeretnénk növelni a pontok számát, hiába: nem lesz több lehetőségünk háromélű egyszerű gráfot előállítani.

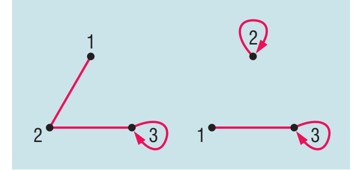
b) Az előző rész alapján elmondhatjuk, hogy akkor érjük el a legnagyobb „szabadsági fokot” az élek elhelyezkedésében, ha minden egyes élt különálló gráfnak is tekinthetünk. Nem nehéz végiggondolni, hogy ehhez legalább $2n$ pontra van szükség.



3102 A feladat szerint nincs kikötve, hogy csak egyszerű gráfokkal dolgozhatunk, tehát a gráfban használhatunk többszörös és hurokéleket is. Tudjuk, hogy a fokszámok összege minden gráfban kétszerese az éleknek, ezért a fokszámok összegének páros számnak kell lennie. Páratlan sok páratlan fokú pontot tartalmazó gráf nem rajzolható. Pl. 2, 3, 4 fokszámú pontokból álló gráf nem készíthető. Sőt, a feltételeknek megfelelő hatpontú gráf sem: akár páros, akár páratlan számmal kezdjük a fokszámok felsorolását, mindig három darab páratlan számnak kellene lennie.

Az 1, 2, 3 fokú pontokból álló gráfot meg tudjuk rajzolni egy vagy két hurokél segítségével. Sőt, ha bármelyik gráf minden egyes pontjára rajzolunk még k darab hurokélt, akkor a pontok fokszámai:

$$1 + 2k, \quad 2 + 2k, \quad 3 + 2k.$$

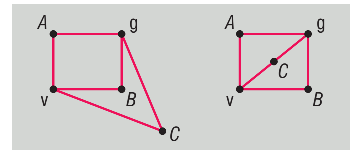


Ilyen gráfok tehát biztosan készíthetők.

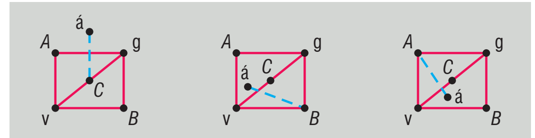
Gondolkodjunk tovább a második ábra alapján. Egyrészt páros ($2n$) fokú pontot mindig készíthetünk elegendő (n) hurokél segítségével. Másrészt páratlan ($2n + 1$) fokú pontból mindig páros soknak kell lennie. Állítsunk párba két ilyen pontot, és kössük össze őket egy éllel, majd illesszünk megfelelő számú hurokélt a pontokra. Így éppen a megfelelő gráfot készíthetjük el.

Összefoglalva: igen, lehetséges, egész pontosan *mindig rajzolható olyan gráf, melyben a pontok fokszámai egymást követő pozitív egész számok, ha a számok között páros sok páratlan van.*

3103 A feladatot lefordítva a gráfok nyelvére: Az A, B, C, g, v, $á$ pontokat akarjuk úgy élekkel összekötni, hogy minden nagybetűs pont össze legyen kötve minden kisbetűs ponttal, de ne legyenek metsző élek. Bizonyos számú próbálkozás után megsejtjük, hogy ez nem lehetséges.



A bizonyításhoz először azt kell észrevennünk, hogy a bekötések során mindig ki kell alakulnia egy zárt négyszögnek. (Négy darab 2 fokú pontnak, melyek egyszerű gráfot alkotnak – a rajzon $AvBg$.) A harmadik ház vagy a négyszög belsejébe, vagy kívülre esik. Ebbe is bekötve a két közművet, már három zárt négyszögünk lesz (a rajzon $BvCg$, $AvCg$). Mivel a két lehetőség a gráfok szempontjából megegyezik, elég az egyiket tekintenünk. Bárhogy is tettünk eddig, a harmadik közmű a nagy négyszögön kívülre, vagy az egyik belsejébe, vagy a másik belsejébe esik. Mindhárom esetben lesz egy olyan négyszög, amit tekintve a harmadik közmű azon kívül/belül van, azonban valamelyik ház meg belül/kívül. Ezt a kettőt így nem köthetjük össze korábbi él metszése nélkül (szaggatott élek).



Megjegyzés: Bár a feladatot gráfokkal ábrázoljuk, igazából a *topológia* témakörébe tartozik.

GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal – megoldások

3104 Például: *ABE*, *ABCBDBE*.

3105 Például: *ABFECD*, *ABFEDC*, *AFEDCB*, *ABCDEF*, *ADCBFE*.

3106 *DACBA*, *DABCA*, *ABCAD*, *ACBAD*.

3107 *a)* Például: *ABABDF*. *b)* Például: *ABCEBDF*. *c)* Például: *ABDF*.

3108 Igen, maga a gráf egy kör: *ABDFGHECA*.

3109 Nincs, a zárt és nyitott Euler-vonal kizárja egymást: a nyitott vonalhoz két páratlan fokú pont szükséges, zárt vonalhoz viszont minden pont fokszámának párosnak kell lennie.



3110 Nincs. Ha egy séta nem vonal, akkor legalább kétszer áthalad egy élen, így annak végpontjain is.

3111 *a)* Van zárt Euler-vonal, például: *ABCD*.

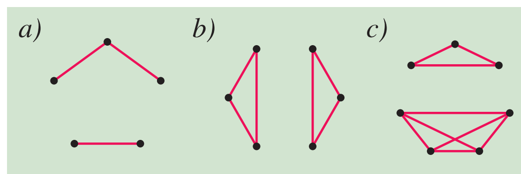
b) Van nyitott Euler-vonal, például: *BACDBC*.

c) Nincs.

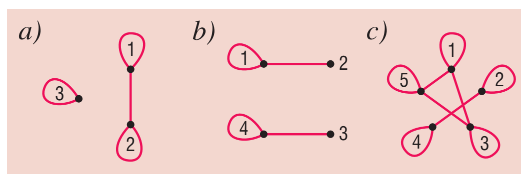
3112 Ahhoz, hogy a ceruza felemelése nélkül lerajzoljuk, az alakzatban nyitott vagy zárt Euler-vonalnak kell lennie. Így

a) lerajzolható (nyitott);
b) lerajzolható (nyitott);
c) nem rajzolható le;
d) lerajzolható (nyitott).

3113 A keresett gráfok az ábrákon láthatók.



3114 Az ábrákon már az irányítás nélküli gráfok láthatók. A gráfok nem összefüggőek, mindegyik két komponensre esik szét.



3115 A megoldásban két-két egyszerű feltételt adunk a fokszámok segítségével arra, hogy egy gráf nem összefüggő, illetve arra, hogy összefüggő.

a) Természetesen a gráf nem lehet összefüggő, ha van izolált pontja.

Ha egy gráfnak van 0 fokú pontja, akkor nem összefüggő.

Ha a gráf élei elég ritkák, akkor sem lesz összefüggő. Például ha 3 vagy több pontból álló gráfban minden pont foka maximum 1, akkor nem alakulhatnak ki „láncok”, amik összefűznék a pontokat. (Ha megengedjük 2 fokú pontok létezését is, akkor már létrejöhet egy olyan lánc, amely a gráf összes pontját tartalmazza.)

Ha egy $n > 2$ csúcsú gráfban nincs 1-nél nagyobb fokszámú pont, akkor nem összefüggő.

b) Ha találunk a gráfban egy olyan pontot, amelyhez az összes többi pont kapcsolódik, akkor ezen a ponton keresztül bármelyik pontból bármelyik pontba eljuthatunk.

Ha egy n pontú gráfnak van $n-1$ fokú pontja, akkor összefüggő.

Ha van olyan pont, amelyhez majdnem minden pont kapcsolódik, akkor a gráf összefüggőségéhez elegendő, hogy a lemaradó pont is kapcsolódjon a többihez.

Ha egy gráfnak van $n-2$ fokú pontja, de nincs 0 fokú pontja, akkor összefüggő.

3116 Ha az ábra gráfjának két pontja összeköttetésben van egymással, az azt jelenti, hogy a négyzetrács megfelelő sorának és oszlopának metszetében levő pixel ki van színezve. Amennyiben a gráfban egy ponthoz több másik kapcsolódik, úgy az adott sorban vagy oszlopban több pixel található (hogy oszlopról vagy sorról van szó, az él irányítása adja meg). Az összefüggő komponensek pontjai sorokat és oszlopokat jelölnek ki.

A gráf különböző komponensei tehát olyan részábrákat jelölnek, melyek különböző sorokban és oszlopokban helyezkednek el, vagyis az egyes részeknek nincs közös négyzetrács-oldaluk. (Ilyen kétkomponensű ábrákat láttunk a 3114. feladatban.)



3117 Először is írjuk fel a szövegben szereplő összefüggést jelekkel. Legyen a gráf n pontú, rendelkezzen e darab éllel, és a minimális fokú pont fokszáma legyen f, a maximális fokú pont foka F. Ekkor a feladat állítása:

$$\frac{f}{2} \le \frac{e}{n} \le \frac{F}{2}.$$

Tüntessük el a törteket a kifejezésből, szorozzuk végig az egyenlőtlenséget 2-vel és n-nel. Így az

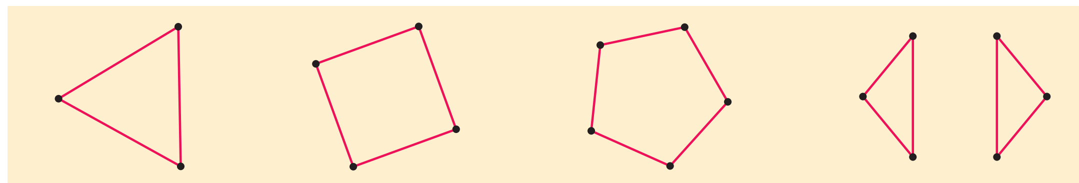
$$n \cdot f \le 2 \cdot e \le n \cdot F$$

összefüggést kapjuk. Ez természetesen teljesül, hiszen $2 \cdot e$ a gráf fokszámainak összege. A bal oldalon álló $n \cdot f$ akkor lenne a fokszámok összege, ha minden pont foka megegyezne a minimális fokú pont fokszámával (aminél természetesen lehetnek nagyobb fokú pontok is a gráfban). Hasonlót mondhatunk a másik egyenlőtlenségre is, sőt az egyenlőségek csak egyszerre teljesülhetnek.

3118 Tételezzük fel az állítás ellentétét. Tegyük fel, hogy van olyan gráf, amelynek $2n$ pontja van, és minden pont fokszáma legalább n, de legalább két komponensre esik szét. Mivel a gráfnak $2n$ csúcsa van, az egyik komponensbe biztosan n vagy annál kevesebb csúcs kerül. Mivel a gráf egyszerű, így komponensei is egyszerűek. Ellentmondáshoz jutunk, ugyanis egy legfeljebb n pontú egyszerű gráfban a legmagasabb fokú pont fokszáma legfeljebb $n-1$ lehet, ellentétben a feladat által említett n-nel. Vagyis a feltett állítás hamis, amiből adódik, hogy ellentéte igaz.

Megjegyzés: A feladat állítását indirekt úton igazoltuk.

3119 Tekintsünk először kevesebb pontú gráfokat. A legkisebb egyszerű gráfnak, mely tartalmazhat kört, három pontja van. A négy- és ötpontú egyszerű gráf pontjai is csak egy kört alkothatnak. A hatpontú egyszerű gráf pontjai alkothatnak egy kört vagy két hárompontú komponenst. Hétpontú gráf megint vagy egyetlen kör, vagy egy három- és egy négypontú komponens. Nyolcpontú gráf állhat egyetlen körből, vagy egy három- és egy ötpontú komponensből, vagy két négypontú komponensből. Kilencpontú gráf állhat három hárompontú komponensből, vagy egy négy- és egy ötpontú komponensből vagy egyetlen körből. Megfigyeléseinkből kitűnik, hogy csak a 3, 4 vagy 5 pontú gráfok alkothatnak egyetlen módon kört. A több pontból álló gráfokat már felbonthatjuk ilyen összetevőkre.



Az általános megoldáshoz fogalmazzuk át a kérdést: hányféleképpen bonthatjuk n-t 3, 4 vagy 5 többszöröseinek összegére? Mivel minket csak a lehetséges válaszok maximuma érdekel, elegendő a legrövidebb (hárompontú) körök számát megállapítani. Azt kell kiszámolnunk, hogy *n-ben hány egész számszor van meg a 3.*

Például az $n = 15$ pontú gráfban lehet öt darab három hosszú kör; $n = 16$ pontú gráfban lehet négy három- és egy négypontú kör; $n = 17$ pontú gráfban lehet négy három- és egy ötpontú kör. Így mindegyikük legfeljebb öt kört tartalmazhat.

Fagráfok – megoldások

3120 Mindkettőből egy.

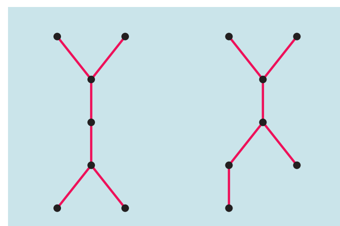
3121 Mivel két pont között pontosan egy út vezet, a gráf 13 élű fa. Így 14 pontja van.



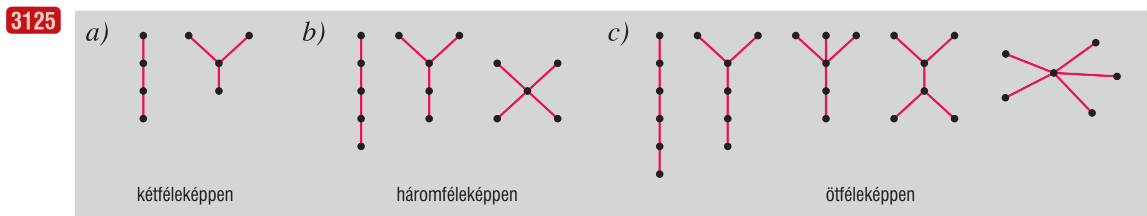
3122 *a)* Fa. Van 8 pontja, 7 éle, 4 levele, 2 három- és 2 kétfokú pontja.
b) Nem fa, mert kört tartalmaz.
c) Fa. Van 9 pontja, 8 éle, 5 levele, 3 három- és 1 kétfokú pontja.
d) Nem fa, mert nem összefüggő.

3123 *a)* Például *láncnak* vagy *fonalnak.* *b)* Kettő.

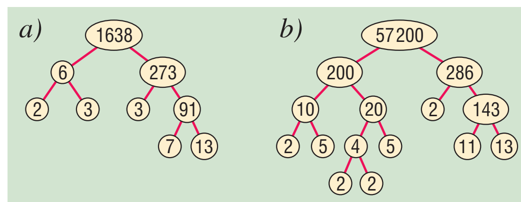
3124 Két különböző fagráf létezik.



3125



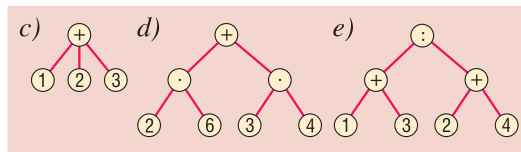
3126 A fákat más módon is felírhatjuk:
a) $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; *b)* $2^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$. (➡)



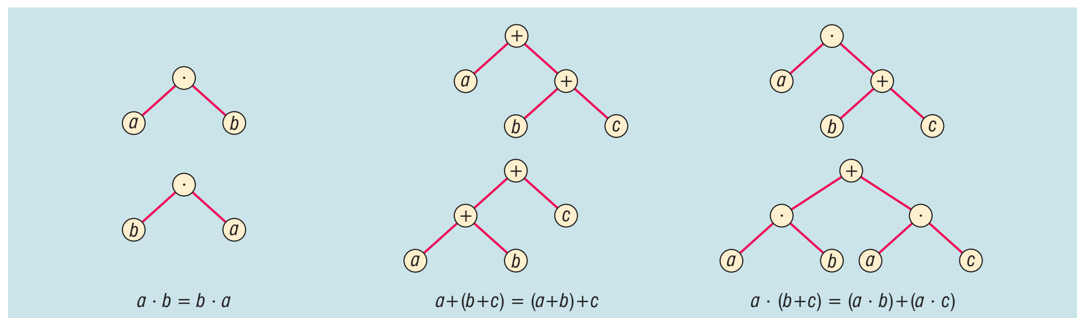
3127 Az élek száma a fokszámok összegének fele, tehát 8. Mivel fa, így eggyel több pontja van, mint éle: 9. A levelek száma:

$$2;\quad 3;\quad \ldots;\quad 8.$$

3128 *a)* $(8 - 2) : 2 = 3$;
b) $(1 + 2) \cdot (12 : 3) = 12$.
A *c)*, *d)* és *e)* alpontok megoldása az ábrán látható.



3129 A műveletek fagráfok segítségével:



Megjegyzés: A műveleti tulajdonságokat is lefordíthatjuk a gráfok nyelvére. Például a kommutativitás jelentése, hogy a művelet alatti két ágat felcseréljük.



3130 Igen, van. Egyrészt minden fában van legalább kettő elsőfokú pont, másrészt nyitott Euler-vonal létezésének szükséges feltétele pontosan kettő páratlan fokú pont létezése. Előbbi megjegyzésből adódóan a kettő páratlan fokú pont csak elsőfokú lehet. Olyan fa, amelyben pontosan kettő elsőfokú pont van, nem tartalmazhat elágazást, tehát csak egyetlen lánc lehet.

Megjegyzés: Pontosan ilyen gráfokról volt szó a 3123. feladatban.

3131 *a)* Furcsa, hogy a gráfban nem ismerjük pontosan a műveletek számát. Írjuk át a gráf alakot hagyományos formába:

$$2-(2+\ldots(2-(2+(2-1))))\ldots).$$

Fejtsük ki belülről, és próbáljunk meg valamiféle szabályszerűséget találni.

$$2-1=1;\quad 2+1=3;\quad 2-3=-1;\quad 2+(-1)=1;\quad 2-1=1;\quad \text{stb.}$$

Azt látjuk, hogy négy lépés után visszajutunk az első állapothoz. Az összeg a műveletek számától (egész pontosan a műveletek számának néggyel való osztási maradékától) függően változik ($k \geq 0$). Az 1 és 3 maradék jelöli a kivonás, a 2 és 0 maradék pedig az összeadás műveletet. Mivel a páratlan maradékok egyszer pozitív, egyszer negatív eredményt adnak, az összeg előjele a kivonások számának paritásától függ.

Művelet száma	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4\cdot(k+1)$
Eredmény	1	3	–1	1

b) Tegyük ugyanazt, mint az előbb:

$$2:(2\cdot(2:(2\cdot\ldots(2\cdot(2:(2\cdot(2:2))))\ldots))).$$

Belülről kifejtve a zárójeleket:

$$2:2=1;\quad 2\cdot1=2;\quad 2:2=1;\quad 2\cdot1=2;\quad \text{stb.}$$

Ebben az esetben az osztás műveletek mindig 1-et adnak eredményül, függetlenül azok számától.

3132 Ha egy fagráfnak 15 pontja van és 12 levele, akkor még van 3 pontja, ami nem levél. Ezen pontok fokszáma nagyobb, mint 1, és egymáshoz kapcsolódnak. Három pont csak úgy alkothat fát, ha körmentesen egymáshoz kapcsolódnak, fokszámaik a leveleket nem tekintve 1, 2, 1. A levelek hozzájuk kapcsolódnak valamilyen módon, de a két szélső ponthoz legalább egy-egy (a középső ponthoz nem feltétlenül kell, hogy levél kapcsolódjon). Ezek után megválaszolhatjuk a kérdést.

a) A legkisebb fokú pont fokszáma 2, a legnagyobb 12.

b) A gráf leghosszabb útja egy levéltől indul, áthalad a három közbülső ponton, majd egy másik levélen végződik. Ez bármely, a feltételeknek megfelelő fa esetében így van. Az út hossza négy él.

3133 Keressünk szélsőséges eseteket! Ilyen eset például, ha az öt komponensből egy tartalmazza az összes élt (16 él, 17 pont), a másik négy komponens pedig egy-egy izolált pontból áll. Ekkor a gráf összesen $17+4=21$ pontot tartalmaz.

Ha kicsit változtatunk az erdőn, és eggyel növeljük az egyik komponens éleinek számát, akkor ez a komponens már eggyel több pontot tartalmaz, a legnagyobb komponens ezzel szemben eggyel kevesebbet. Tehát az összpontszám nem változik. A fenti gondolatot általánosíthatjuk.

Jelöljék a, b, c, d, e egész számok az egyes komponensek éleinek számát ($0 \leq a;\ b, c, d, e \leq 16$). Ekkor:

$$a+b+c+d+e=16,$$

az egyes komponensek pontjainak száma pedig rendre:

$$a+1,\quad b+1,\quad c+1,\quad d+1,\quad e+1,$$

hiszen minden komponens fagráf.

Az összes pontok száma pedig valóban független a, b, c, d, e-től:

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)+(e+1)=$$
$$=a+b+c+d+e+5=16+5=21.$$



3134 A gráfban a pontok fokszámainak összege $2n$. Ebből adódik, hogy éleinek száma n.

a) Először tételezzük fel, hogy a feladatban említett gráf összefüggő. Mivel gráfunknak n pontja és n éle van, így nem lehet körmentes: az n pontú fának, ami maximális körmentes gráf, csak $n-1$ éle van. Mivel itt az élek száma eggyel több, már nem lehet körmentes, következésképpen a gráfban van kör.

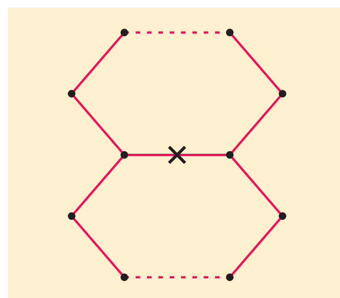
Amennyiben a gráf nem összefüggő, azaz több komponensből áll, akkor valamelyik összefüggő komponensben legalább annyi pontnak kell lenni, mint amennyi éle van. (Ugyanis ha minden komponensben kevesebb él lenne, mint amennyi pont, akkor az élek és pontok összege nem lenne egyenlő.) Erre a komponensre pedig alkalmazhatjuk az előző bekezdés gondolatmenetét.

Ezzel bizonyítottuk, hogy az n pontú, n élű gráfban van kör.

b) Tételezzük most fel, hogy az n pontú, n élű gráf egyszerű, összefüggő és legalább kettő kört tartalmaz. Ekkor két eset lehetséges: vagy van két különálló kör a körök között, melyeknek minden éle különböző; vagy van két kör, melyeknek van legalább egy közös éle.

Ha az első lehetőség áll fenn, akkor valamelyik körből egy élt törölve a kapott gráf még mindig összefüggő, n pontú, viszont $n-1$ éle van. Mivel több különálló kört tartalmazott, és csak az egyik kör egyik élét töröltük, így még mindig tartalmaz kört. Ez azonban nem lehetséges, mert az n pontú, $n-1$ élű egyszerű, összefüggő gráf fa, vagyis körmentes. Ebben az esetben ellentmondásra jutottunk.

Ha van két kör, melyeknek van közös éle, akkor ezt az élt törölve, ismét n pontú, $n-1$ élű, egyszerű, összefüggő gráfhoz jutunk. Azonban a feltevés alapján ez a gráf is tartalmaz kört, ugyanis a törölt él két végpontja között két különböző út vezet: egyik út az egyik kör visszamaradt élein át, másik út a másik kör visszamaradt élein át. (Amennyiben nem a közös élek közül törlünk egyet, akkor az egyik kör megmarad eredeti állapotában, vagyis visszakapjuk az első lehetőséget.) Tehát ebben az esetben is ellentmondásra vezetett a gondolatmenet.



Bárhogyan is okoskodtunk, feltevésünk mindig ellentmondásra vezetett. Tehát az ellentéte kell hogy igaz legyen: az n pontú, n élű, egyszerű és összefüggő gráf pontosan egy kört tartalmaz. (Emlékeztetőül: az *a)* pontban bizonyítottuk, hogy az n pontú, n élű gráf mindig tartalmaz kört.)

Megjegyzés: A feladat *b)* részében indirekt bizonyítást alkalmaztunk.

3135 *a)* Tételezzük fel, hogy p darab (p nemnegatív egész) legalább háromfokú pontja van a fának. Ezen pontok fokszámainak összege ekkor legalább $3n$.

Elsőnek töröljük a gráfból a kétfokú pontokat úgy, hogy a pontot elhagyva szomszédait egyetlen éllel kötjük össze. Ezekről egyrészt amúgy sem szól a feladat, másrészt csupán annyi szerepük van, hogy „nyújtják" a gráfot, az elágazásokat és a leveleket kötik össze. A gráf a törlés után is fa, hiszen egyszerű maradt, összefüggő és körmentes. Fontos megjegyeznünk, hogy a megmaradó pontok fokszámát nem változtatja meg a kétfokú pontok törlése.

Ezután töröljük a gráfból a leveleket is, a hozzájuk kapcsolódó élekkel együtt. A gráf a levelek törlése után is fa marad. A megmaradó pontok pontosan a p darab, eredetileg legalább harmadfokú pontok lesznek. Mivel fát alkotnak, összekötő éleik száma $p-1$. Fokszámaik összege ezért

$$2 \cdot (p-1) = 2p - 2.$$

Mivel eredetileg a fokszámösszeg legalább $3p$ volt, így legalább $p+2$ darab él hiányzik. Mivel a kétfokú pontok nem változtattak a többi pont fokszámán, így a hiányzó fokszámot csak

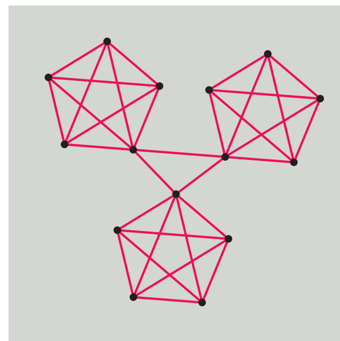


az elsőfokú pontok pótolhatják, mégpedig egy fokszámot egy pont. Legalább háromfokú pont pontosan p darab volt, elsőfokú pont pedig legalább $p+2$, így az elsőfokú pontok száma legalább kettővel több a legalább háromfokú pontok számánál.

b) Az *a)* rész gondolatmenetéből világos, hogy akkor van pontosan 2 elsőfokú ponttal több a gráfban, mint legalább háromfokú pont, ha utóbbiak fokszámösszege pontosan $3p$. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha minden legalább háromfokú pont foka pontosan három, nincs negyed vagy magasabb fokú pont a fagráfban.

A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai – megoldások

3136 *a)* A feltételek szerint az első szoba egyik gépe össze van kötve a másik két szoba egy-egy gépével. Mivel a másik kettő szobában is pontosan egy gép van összeköttetésben a többi szobával, így ezek a gépek már meghatározottak. A gépeket nem különböztetjük meg. A hálózat az ábrán látható.



b) Ebben a hálózatban van három darab ötpontú teljes gráf (összesen tizenöt pont), illetve az ezeket összekötő három él. Tehát a 15 ponthoz kapcsolódik összesen $3 \cdot 10 + 3 = 33$ él. Világos, hogy a gráf összefüggő, így éleinek elhagyásával készíthető belőle fa. Azonban egy 15 pontú fában maximum 14 él lehet, így gráfunkból el kell hagyni pontosan $33 - 14 = 19$ élt.

c) Az eredeti felálláshoz képest annyi változott, hogy most nem feltétlenül ugyanaz a gép tartja a kapcsolatot a másik két szobával. Azaz az első szoba öt gépe közül valamelyik kapcsolatban áll a második szoba öt gépének valamelyikével. Ez $5 \cdot 5 = 25$ lehetőség. Ettől függetlenül ugyanez a helyzet a második és harmadik, illetve a harmadik és első szoba között is. A lehetőségek száma a helyiségek közötti kapcsolatok kiépítésére összesen:

$$\left(5^2\right)^3 = 5^6 = 15\,625.$$

d) Mivel minden helyiségből kettő gépet választanak ki, az összes lehetőségek száma a három független ismétlés nélküli kombináció szorzata:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = \left[\binom{5}{2}\right]^3 = 10^3 = 1000.$$

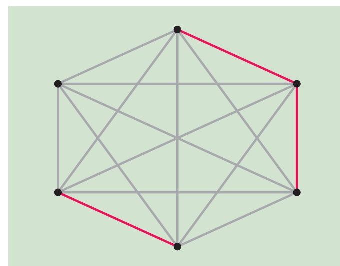
e) Természetesen három kábellel nem lehet minden gépet hálózatba kötni. Legfeljebb négyet lehet sorba vagy csillag alakzatba kötni, illetve a másik véglet, hogy kettő-kettő-kettő darabot három csoportba (a szöveg szerint felhasználjuk mind a három kábelt).

Tételezzük fel, hogy a hat gép 1-től 6-ig van sorszámozva.

Ekkor közöttük $\binom{6}{2} = 15$ lehetőség van kábel elhelyezésére.

Ebből a 15 helyből választhatunk ki hármat, ahova ténylegesen kábelt helyezünk. Így a három kábellel összesen

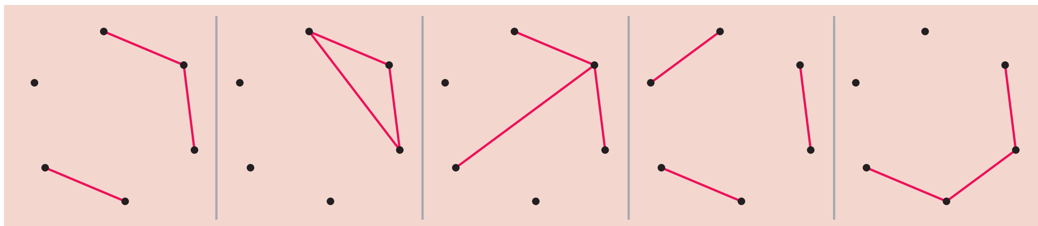
$$\binom{\binom{6}{2}}{3} = \binom{15}{3} = 455$$



lehetőség van a hat számítógép összekapcsolására, ha azokat megkülönböztetjük. Az ábrán szürkével a lehetőségek, pirossal egy konkrét megvalósítás látható.



f) Ha nem különböztetjük meg a gépeket, akkor a három kábel elhelyezésére összesen öt lehetőségünk adódik. Az ábrákon látható, hogy az izolált pontok száma 0 és 3 között változik.

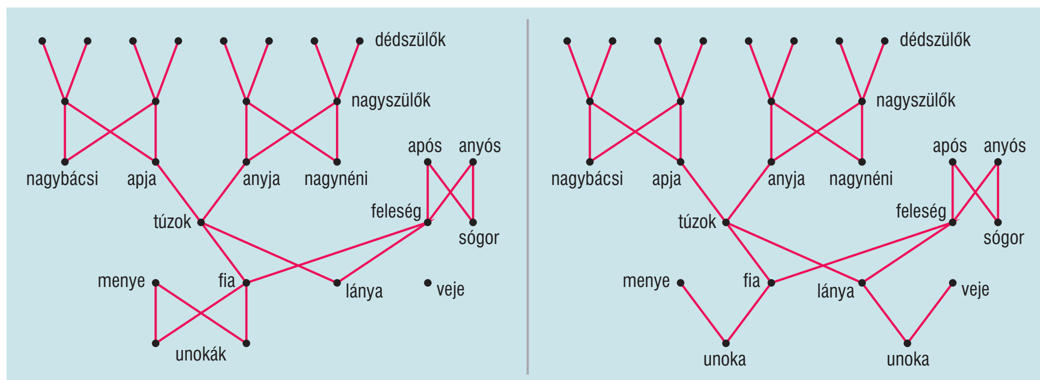


3137 *a)* Nincs.

b) Unokától dédszülőig hat generáció (unoka–gyerek–saját maga–szülő–nagyszülő–dédszülő).

c) Lássuk generáció szerint: unokák 2; gyerekek és házastársaik 4; a túzok, házastársa és az ő testvére 3; szüleik és a túzok szüleinek testvérei 6; a túzok nagyszülei 4; az ő szüleik 8. Összesen 27.

d) Az unokák miatt háromféle gráf lehetséges: vagy mindkét unoka a túzok fiának gyereke, vagy mindkettő a túzok lányának gyereke, vagy egyik unoka a fiúé, egyik pedig a lányé. Az az ábra hiányzik, amikor mindkét unoka a lánygyereké.



e) Az ábrán jól látható, nem fagráfot kaptunk. Amennyiben az unokák testvérek, öt kört és egy izolált pontot tartalmaz a gráf; ha pedig unokatestvérek, akkor négy kört és nulla izolált pontot tartalmaz a családfa gráfja.

f) A túzokok nem házasodnak családon belül, ezért minden madárnak két újabb szülője van. Mivel az ükszülőkig négy generáció van, összesen $2^4 = 16$ ükszülője van a túzoknak.

g) Az összes rokon ismétlés nélküli permutációinak száma: $27!$

h) Az egyes sorokban ismétlés nélküli permutációkat kell számítanunk. Az egyes sorok nem függnek a többitől, így szorzatukat kell tekintenünk: $2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 8!$

i) A 27 túzokot kell három csapdában elhelyeznünk, maximum tízesével.
Így a lehetséges esetek:

$$10 + 10 + 7\ (3), \qquad 10 + 9 + 8\ (6), \qquad 9 + 9 + 9\ (1).$$

Zárójelben a darabszámok lehetséges permutációinak számát adtuk meg. Mivel az egyes variációk minden esetben megegyeznek, így az összes esetek száma egy elég nagy érték:

$$3 \cdot \binom{27}{10} \cdot \binom{17}{10} \cdot \binom{7}{7} + 6 \cdot \binom{27}{10} \cdot \binom{17}{9} \cdot \binom{8}{8} + 1 \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}.$$



Vegyes feladatok – megoldások

3138 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, 5, –8, 13, …

3139 $7! = 5040.$

3140 $\dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60.$

3141 $\dfrac{12!}{(12-3)!} = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320.$

3142 $7^{10} = 282\,475\,249.$

3143 *a)* $\dfrac{25!}{3!\cdot 22!} = \dfrac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2\cdot 1} = 25\cdot 4\cdot 23 = 2300;$

b) $\dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56 > \dfrac{11!}{2!\cdot 9!} = \dfrac{11\cdot 10}{2\cdot 1} = 55.$

3144 *a)* $\binom{10}{7} = 120;$ *b)* $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120.$

3145 *a)* $\binom{18}{6} = 18\,564;$ *b)* $\binom{4}{0}\cdot\binom{14}{6} = 3003;$ *c)* $\binom{4}{4}\cdot\binom{14}{2} = 91;$ *d)* $\binom{4}{2}\cdot\binom{14}{4} = 6006.$

3146 A megadott konvex sokszög átlóinak számára felírható:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = 170.$$

Az egyenlet rendezése után kapjuk:

$$n^2 - 3n - 340 = 0,$$

amiből $n_1 = 20$ és $n_2 = -17$. A sokszögnek tehát 20 csúcsa van.

3147 $\binom{90}{5} - \left[\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5} + \binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}\right] = 1023826.$

3148 *a)* $16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4;$

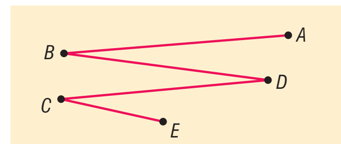
b) $a^9 + 18a^8b + 144a^7b^2 + 672a^6b^3 + 2016a^5b^4 + 4032a^4b^5 + 5376a^3b^6 + 4608a^2b^7 +$
$+ 2304ab^8 + 512b^9;$

c) $3363 + 2378\cdot\sqrt{2};$

d) $\dfrac{1}{2^8}x^8 + \dfrac{1}{2^3}x^7y + \dfrac{7}{2^2}x^6y^2 + 14x^5y^3 + 70x^4y^4 + 224x^3y^5 + 448x^2y^6 + 512xy^7 + 256y^8.$

3149 *a)* $2^8 = 256;$ *b)* $2^{16} = 65536;$ *c)* egyenlők; *d)* egyenlők.

3150 Először *A* felhívja *B*-t, aki megadja *D* telefonszámát.
Másodszor *A* felhívja *D*-t, aki megadja *C* számát.
Harmadszor *A* felhívja *C*-t, aki megadja *E* számát.
Negyedik lépésben *A* felhívhatja *E*-t: négy hívás szükséges.





3151 *a)* Igen, a teljes gráf.

b) Nem.

c) Képzeljünk el egy szabályos hatszöget, kössük össze éllel a szomszédos és a szemközti pontokat.

d) Nem.

e) Tegyük ugyanazt, mint *c)*-ben.

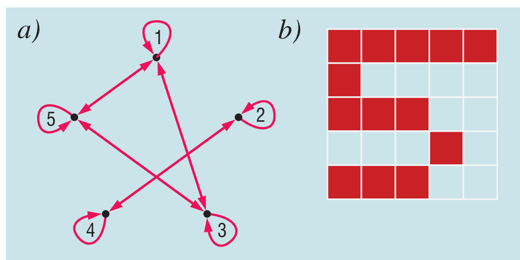
3152 Összesen $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ meghajlást fog látni a titkárnő. Az eddig látott meghajlások száma:

$$2 + 3 + 1 + 4 + 5 + 3 = 18,$$

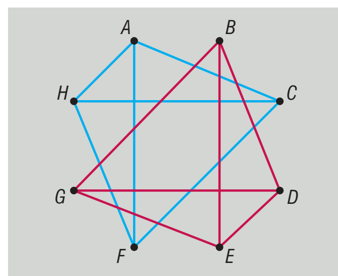
azaz $50 - 18 = 32$ még hátra van.

3153 *a)* A gráf szétesik két különálló részre: a páros és a páratlan sorszámú pontokra.

b) Jelest.



3154 Nem, a gráf szétesik egy *BGDE* és egy *AHCF* különálló részre.



3155 *a)* Séta: *AFAFG*. *b)* Vonal: *ACDAEG*. *c)* Út: *ABG*.

3156 *a)* A nyitott Euler-vonalhoz egy élt, a zárt Euler-vonalhoz kettő közös végpont nélküli élt kell berajzolni az *A*, *B*, *D*, *F* pontok között.

b) Az *AB* élt kell törölni.

3157 Az ábra szimmetrikus a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átlóra.

3158 *a)* Általában fagráfot kapunk.

b) Csak akkor nem fa a kapott gráf, ha tartalmaz kört. Ez pedig akkor van, ha vagy a szülők, vagy valamelyik nagyszülők testvérek vagy féltestvérek.

3159 Mivel hat helység van, a feltételnek megfelelően fagráfot kell létrehoznunk: pontosan öt útnak (élnek) kell lenni. Most három van, kettőt szükséges építeni. Például lehet Andalógiából Félnótába és onnan Butulba, vagy Celebből Félnótába és onnan Együgybe.

3160 Két mérés elegendő: először vegyünk el egyet, és szedjük szét három-három érmére a maradékot. Ezeket mérjük meg, ha a két rész egyenlő tömegű, kész vagyunk, az elvett érme a hamis. Ha az egyik rész nehezebb, ismételjük meg azon három érmére a fentieket. Mindez fagráffal ábrázolva a rajzon látható.

